Kostka sześcienna w matematycznej edukacji dzieci

Adam Płocki

Państwowa Wyższa Szkoła Zawodowa w Nowym Sączu
adam.plocki@up.krakow.pl

Streszczenie

Przedmiotem pracy jest kostka sześcienna do gry jako przyrząd losujący, kreujący (dzięki szczególnemu rozkładowi oczek na jej ścianach) problemy z rachunku prawdopodobieństwa i kombinatoryki, arytmetyki i nauki o funkcji, logiki i teorii mnogości, geometrii (euklidesowej i analitycznej) i algebry, teorii ciągów i statystyki matematycznej (chodzi nie tylko o zbieranie, porządkowanie i opracowywanie danych empirycznych, lecz także o estymację, weryfikację hipotez oraz o losowanie reprezentatywnej próbki z populacji skończonej). Kostka jest w tej pracy rekwizytem w grach ilustrujących procesy podejmowania decyzji w warunkach ryzyka, środkiem matematyzacji w procesie stosowania matematyki, elementem składowym wielu paradoksów i sztuczek (jako środek matematycznej aktywizacji). Ponadto ilustruje wnioskowania przez analogie i symetrie (a więc ukazuje matematykę bez rachunków).

1. Wprowadzenie

Fuzję kombinatoryki, rachunku prawdopodobieństwa (zwanego *probabilistyką*), statystyki matematycznej i statystyki opisowej nazywamy *stochastyką*.

Praca dotyczy propedeutyki stochastyki. Tę stochastykę rozumiemy jako nowy, specyficzny i trudny (dla nauczyciela) dział szkolnej matematyki, a przede wszystkim jako źródło (inspirację) specyficznych aktywności matematycznych nieznanych w nauczaniu arytmetyki, geometrii czy nauki o funkcji. Praca dotyczy stochastycznego aspektu powszechnego kształcenia matematycznego.

Problematyka pracy koncentruje się wokół kostki sześciennej do gry. Mówimy o kostce, która powstała z sześcianu przez rozmieszczenie na jego ścianach oczek w liczbach od 1 do 6, ale tak, że

na każdych dwóch przeciwległych ścianach jest łącznie 7 oczek.

Kostkę sześcienną, która ma tę własność w_7, nazywamy *klasyczną* *kostką*. Ta własność w_7 sprawia, że wokół kostki pojawia się ciekawa arytmetyka i logika, geometria i kombinatoryka, nauka o funkcji i nauka o zbiorach, rachunek prawdopodobieństwa i statystyka matematyczna. Kostka może na lekcji integrować matematykę. Mowa tu o idei fuzjonizmu (Płocki, 2005: 77). Kostka pojawia się także w tej pracy w procesie stosowania matematyki, a ściślej w fazie matematyzacji, która jest pierwszym etapem tego procesu.

Rozważania są odpowiedzią na pytania: komu, w jakiej sytuacji i do czego mogą się przydać dysputy o rzucaniu kostkami, a także, jak ciekawa i różnorodna matematyka pojawia się przy analizowaniu tych doświadczeń losowych?

Autor zakłada, że takie pytania stawia sobie dziś zarówno nauczyciel i uczeń, jak i każdy ciekawy świata człowiek.

Spora część rozważań, przykładów i zadań adresowana jest do ucznia, część zaś do nauczyciela, którego kompetencje w zakresie propedeutyki stochastyki są (nie z jego winy) raczej ubogie. Na studiach rachunek prawdopodobieństwa jest prezentowany wyłącznie jako gotowa teoria aksjomatyczna oderwana od swych empirycznych źródeł, metod i zastosowań.

Autor proponuje w pracy pozamatematyczne sytuacje problemowe (np. co zrobić, gdy zginęła ci kostka do gry, co, gdy do ciasta nie trafi rodzynek, bo się zabłąkał, którą z szyfrowych kłódek opłaca się kupić, czy jest wiarygodna ocena z testowego sprawdzianu wiedzy?). W ich kontekście uczeń sam formułuje sensowne pytania i zadania, przekłada je na język matematyki i próbuje zaleźć (czasami dopiero odkryć) narzędzia ich rozwiązywania.

2. Stochastyczny aspekt powszechnego kształcenia matematycznego

Kształcenie matematyczne obejmuje różne aspekty matematyki (arytmetyczny, geometryczny, kombinatoryczny, mnogościowy). W drugiej połowie ubiegłego wieku edukacja szkolna stanęła przed nowym zadaniem wypracowania koncepcji stochastycznego kształcenia w ramach powszechnej edukacji matematycznej. Osiągnięcia w tym zakresie są wyjątkowo skromne. W podręcznikach akcent położony jest na rachunki związane z obliczaniem prawdopodobieństwa zdarzenia jako ilorazu mocy dwóch zbiorów. Rachunki prowadzone są w oderwaniu od przestrzeni probabilistycznej, a więc w sensie merytorycznym aktualny szkolny „rachunek prawdopodobieństwa" nie jest w ogóle rachunkiem prawdopodobieństwa. Treść i forma przykładów i zadań skłania do raczej smutnych refleksji.

Weźmy pod uwagę jedno zadanie (nadal) typowe dla aktualnych ujęć szkolnego rachunku prawdopodobieństwa.[1]

Zadanie 1.

> W celu wyłonienia reprezentanta klasy liczącej 8 chłopców i 16 dziewcząt wybieramy losowo 2 osoby, a następnie spośród nich losujemy jedną. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że klasę będzie reprezentować chłopiec?

Wydaje się, że jest to sensowne, „życiowe" zadanie na obliczanie prawdopodobieństwa. Dwie osoby „wybieramy losowo", jedną zaś „losujemy". Są to jakieś czynności, których znaczenia nie sprecyzowano. Zwrot „wybieramy losowo" jest bez wątpienia błędem logicznym – to *oksymoron*, czyli *antylogia*, albo *epitet sprzeczny* (Płocki, Nawolska, 2016: 213).

W przypadku „losowania" nie wiadomo o jaką procedurę chodzi i jaki jest „czas akcji" (*wybieramy..., losujemy*)? Czy ta czynność trwa, czy już się odbyła, czy dopiero nastąpi? W praktyce takie „losowanie" jednej z grona wielu osób organizuje się rozmaicie. Czasami robi się to za pomocą zapałek (por. przykład 1.), kiedy indziej *metodą marynarza* (Płocki 2011a: 19–20). W przypadku losowania zapałkami szanse każdej osoby na wylosowanie są jednakowe. Mówimy, że losowanie zapałkami jest *sprawiedliwe*. Oznacza to, że model probabilistyczny tego losowania jest klasyczną przestrzenią probabilistyczną. W losowaniu jednej z sześciu osób *metodą marynarza* szanse tych osób nie są równe (Płocki 2011a: 109).

Niech $A = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$. W rozważanej dalej grze (zob. przykład 3.) będzie *losowana* liczba ze zbioru A za pomocą dwóch kostek. Wylosowana liczba to będzie liczba oczek wyrzuconych dwiema

[1] Jest to zadanie z próbnej matury w Małopolsce w marcu 2000 r. (por. „Gazeta Bielska", dodatek „Gazety Wyborczej" z 31 marca 2000).

kostkami. Odkryjemy *a posteriori*, że pewne liczby mają w tym losowaniu większe, a inne mniejsze szanse. To losowanie *nie jest sprawiedliwe*.

Liczbę ze zbioru A można losować za pomocą urny, w której jest 11 kul ponumerowanych od 2 do 12. Numer wylosowanej kuli z tej urny[2] jest wylosowaną liczbą. To losowanie liczby jest sprawiedliwe. Nazwa *losowanie* ma więc różne treści (Płocki, Nawolska, 2016: 48). Nie jest to nazwa jednoznaczna.

Zadania 1. nie da się rozwiązać, brakuje bowiem informacji o probabilistycznym modelu losowania. Rodzą się tu ponadto naturalne pytania: Kto, w jakiej sytuacji i z jakiego powodu mógł sformułować to zadanie? Jaką wiedzę i jakie kompetencje z rachunku prawdopodobieństwa to zadanie pozwala kontrolować i oceniać (jest to wszak zadanie z matury)?

Cele kształcenia stochastycznego oraz przedmiot kontroli i oceny kompetencji ucznia w zakresie stochastyki są nadal aktualnymi problemami dydaktyki matematyki (Płocki, 2005). Ciągle utrwalane są błędy poprzez formę i treść:

- problemów, którymi kształtujemy pojęcia i intuicje stochastyczne;
- zadań, za pomocą których sprawdzamy i oceniamy dziś stochastyczną wiedzę naszych uczniów.

2.1. Dydaktyczne problemy kształcenia stochastycznego – problematyka zadań i kostka a motywacje w kształceniu stochastycznym

Prawdopodobieństwo zdarzenia jest w tej pracy zaprezentowane w kontekście procesu stosowania matematyki. Obliczane, a najczęściej oceniane, szacowane w zadaniach prawdopodobieństwa dotyczą zdarzeń związanych z rzutem kostkami, ale – dzięki pewnym stochastycznym analogiom – są to zarazem zdarzenia związane z:

- podejmowaniem decyzji w warunkach niepewności lub ryzyka;
- oceną szans na zwycięstwo w grze losowej;
- oceną ryzyka, że złodziej otworzy szyfrową kłódkę z czterema gałkami (zob. rysunek 16.); to ryzyko jest równocześnie szansą na trafne obstawianie wyniku czterokrotnego rzutu kostką w pewnej grze;

[2] Urna i losowanie kuli z urny są już w matematyce określone jednoznacznie.

- rozstrzyganiem wiarygodności pozytywnej oceny z testowego sprawdzianu wiedzy, na którym uczeń ma do każdego z n pytań wskazać wśród sześciu dołączonych odpowiedzi tę, która jest właściwa;
- rozstrzyganiem, czy dany fakt jest rezultatem wiedzy, talentu, pewnych zdolności, czy też zgadywania (a więc przypadku);
- szacowaniem pewnych wielkości na podstawie danych statystycznych;
- weryfikacją pewnych hipotez, a także
- organizacją losowania reprezentatywnej próbki z populacji skończonej.

Praca dotyczy obecności kostki sześciennej wokół nas oraz matematyki kreowanej przez tę kostkę. Mamy na uwadze „matematykę dla każdego", w tym także dziecięcą matematykę.

W pracy formułujemy odpowiedzi na (ważne dla nauczyciela) pytania:

1. Jak inspirować i jak motywować odkrywanie na lekcji matematyki podstawowych pojęć rachunku prawdopodobieństwa?
2. Jak kształtować te pojęcia jako nowe, bardzo specyficzne (ale matematyczne!) narzędzia rozwiązywania konkretnych problemów?
3. Jak wprowadzać ucznia w metodologię stochastyki, a więc jak oswajać go ze specyficznymi wnioskowaniami stochastycznymi?
4. Jak uzasadniać wiarygodność tych wnioskowań?
5. Jak na lekcji organizować matematyczne odkrycie (chodzi o treść i formę przykładów i zadań), jakie kreować matematyczne aktywności i w jaki sposób?
6. Jak wykorzystać te aktywności do kształcenia matematycznego oraz do kształcenia przez matematykę?

Stochastyka inspiruje rozmaite, w tym specyficzne tylko dla niej, aktywności matematyczne[3].

[3]W podręcznikach są to w zasadzie jedynie rachunki i (w skromnym zakresie) dedukcja.

Są to, na przykład:

- refleksja *a posteriori* (jak na gruncie matematyki wyjaśnić to, że praktycznie w każdej grupie dwunastu przypadkiem spotkanych osób są dwie urodzone pod tym samym znakiem zodiaku?);
- wnioskowania przez specyficznej natury analogie i symetrie (losowanie zapałkami jednej z grona sześciu osób jako symulacja rzutu kostką, por. przykłady 1. i 2.);
- matematyzowanie sytuacji pozamatematycznych (jeśli uczeń nic nie umie z materiału objętego testowym sprawdzianem wiedzy, o którym wspomina się wyżej, to wypełnianie tego testu jest n-krotnym rzutem kostką);
- zbieranie danych statystycznych i ich porządkowanie środkami statystyki opisowej (te opracowane dane są podstawą estymacji i weryfikacji hipotez).

Wnioskowania oparte na tych danych są wiarygodne tylko wtedy, gdy procedura ich zbierania spełnia pewne warunki (losowanie jest „sprawiedliwe").

W pracy wykorzystujemy kostkę do pokazania, co, jak i dlaczego się matematyzuje w stochastyce.

2.2. Realny świat i konkretna czynność w propedeutyce stochastyki a kostka do gry

Świat przypadku jest światem specyficznych czynności i to zarówno pomyślanych, jak i realnych. Konkretne czynności i ich wyniki (jako dane statystyczne) odgrywają szczególną rolę w matematycznej aktywizacji. Dane statystyczne mogą być stadium matematycznego myślenia. Zbieranie i opracowywanie danych statystycznych polega w istocie na wielokrotnym losowaniu elementu ze zbioru i jest konkretną czynnością, spełniającą odpowiednie warunki. Określanie procedur takiego losowania jest też aktywnością matematyczną. Zwrot „losowanie" ma rozmaity sens.

Na lekcji geometrii uczeń zgina papierowy model rombu wzdłuż jego „przekątnych", aby odkryć, że *przecinają się one pod kątem prostym* i że *ten punkt przecięcia dzieli każdą z tych przekątnych na połowy.*

Ten obiekt („romb” wycięty z papieru) i wykonywane na nim czynności (zginanie) nie należą do świata matematyki, ale odkrywane fakty są własnościami rombu jako (już) obiektu świata matematycznej abstrakcji. Geometryczne pojęcia w matematyce dziecięcej są prezentowane w ścisłym powiązaniu z ich realnymi modelami i z konkretnymi czynnościami.

W tej pracy będziemy oglądać, obracać, przewracać, przesuwać, odwracać, a nawet konstruować realne kostki. I konkretnymi kostkami będziemy rzucać. Ale wnioski, jakie sformułujemy, odnosić się będą do matematycznych modeli tych rzutów, a więc do rzutów kostkami, o których mówi matematyk. Ta praca jest poświęcona roli konkretnych czynności i realnych obiektów w matematycznej aktywizacji dziecka przy wprowadzaniu go w „świat przypadku”.

Wyróżniamy tu:

- konkretne czynności, które będziemy na lekcji wykonywać, a więc: rzuty kostkami, tasowanie i rozkładanie na stole kart przy układaniu pasjansa, losowanie za pomocą rulety lub ruletki, losowanie jednej z grona wielu osób za pomocą zapałek (zob. przykład 1.) lub *metodą marynarza*, losowanie za pomocą papierowych losów, kto komu przygotuje w klasie mikołajkowy upominek, oraz
- czynności pomyślane, które będziemy jedynie opisywać, a więc: losowe rozmieszczanie kul w szufladach, mieszanie i dzielenie na kawałki ciasta z rodzynkami – chodzi tu o język, w którym formułujemy te czynności.

Mówimy tu o *enaktywnych formach* prezentacji treści stochastycznych (por. zasada prefiguracji Brunera, Płocki, 2005; s. 75).

3. Kostka do gry i matematyka inspirowana kostką

W matematycznej edukacji dzieci kostka sześcienna, a zwłaszcza jej matematyczne osobliwości wynikające z własności w_7, są dziś prawie nieobecne.

3.1. Rzut kostką i jego model probabilistyczny

W pracy mówimy o:

- konkretnej kostce, którą uczeń zna jako rekwizyt w wielu grach;

- kostce symetrycznej, która istnieje tylko w świecie matematycznej abstrakcji.

Rzut konkretną kostką jest realnym doświadczeniem losowym – rzut symetryczną kostką to jest doświadczenie losowe pomyślane (Feller, 1987).

Rzucając kostką, obserwujemy liczbę oczek na jej górnej ścianie po upadku. O tej liczbie oczek mówimy, że *wypadła*, albo że *została wyrzucona*. Wynikiem rzutu kostką jest liczba wyrzuconych oczek. Możliwe wyniki tworzą zbiór $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Przed rzutem nie da się jednoznacznie przewidzieć, ile wypadnie oczek. Ale dla każdego wyniku da się określić *a priori* prawdopodobieństwo (szanse na to), że rzut zakończy się tym wynikiem, gdy rzucimy kostką za chwilę, jutro czy za miesiąc. Wszystkie te wyniki są jednakowo prawdopodobne. Jeśli p jest funkcją, która każdemu wynikowi rzutu kostką przypisuje jego prawdopodobieństwo, to

$$p(1) = p(2) = p(3) = p(4) = p(5) = p(6) = \tfrac{1}{6}.$$

Para (Ω, p) jest modelem rzutu kostką. Jako obiekt matematyki ta para (Ω, p) jest przestrzenią probabilistyczną (Płocki, 2011a).

Zadanie 2.

> Z grona 6 osób trzeba wylosować jedną, ale tak, by każda miała równe szanse (to losowanie ma być sprawiedliwe). Jak to zrobić za pomocą kostki?

Przykład 1. [LOSOWANIE ZAPAŁKAMI JEDNEJ Z 6 OSÓB] Aby wylosować jedną z grona sześciu osób: Asi, Basi, Cesi, Danki, Edka i Franka, wzięto 6 zapałek i jednej odłamano główkę. Te zapałki trzyma w dłoni Grzesiek i to tak, że są zakryte te końce, w których jest lub była główka. Są one z wyglądu identyczne, nie widać więc, która z trzymanych w dłoni zapałek jest tą z usuniętą główką. Ustalono, że dzieci będą podchodzić do Grześka według kolejności alfabetycznej swoich imion. Każdy wyciągnie zapałkę z jego dłoni. Wylosowanym będzie ten, kto wyciągnie zapałkę bez główki.

W książce (Płocki 2011a: s. 81) dowodzi się, że dla każdej z osób w kolejce do wyciągania zapałki prawdopodobieństwo, że trafi ona na zapałkę bez główki jest jednakowe i jest równe $\frac{1}{6}$. W takim losowaniu każda z sześciu osób ma równe szanse. To losowanie zapałkami jest sprawiedliwe.

Przykład 2.[KOSTKĘ MOŻNA ZROBIĆ Z SZEŚCIU ZAPAŁEK] Z przykładu 1. wynika, że rzut kostką można symulować za pomocą sześciu zapałek, z których jedna jest bez główki. Wystarczy wymieszać te zapałki i wziąć w dłoń tak, że widoczne są te końce, w których nie ma (i nie było) główki. Teraz wystarczy, aby ktoś wyciągał (a więc losował) z dłoni po jednej zapałce tak długo, aż trafi na zapałkę bez główki. Liczba wyjętych zapałek w takim losowaniu może być interpretowana jako liczba oczek uzyskanych w rzucie kostką.

Niezwykle ciekawa i bogata matematyka kostki jest logiczną konsekwencją dwóch prostych faktów.

Jest 6 wyników rzutu kostką, wszystkie są jednakowo prawdopodobne.

Na każdych dwóch przeciwległych ścianach kostki jest łącznie 7 oczek.

3.2. Stochastyka kostki i proces podejmowania decyzji

Przykład 3. [TOTO-LOTEK Z DWIEMA KOSTKAMI] Każdego z uczniów zapraszam na lekcji do gry[4]. Za chwilę (jako prowadzący lekcję) rzucę na stół dwie jednakowe (duże) kostki, ale zanim to się stanie, każdy uczeń stawia na to, jaka będzie liczba łącznie wyrzuconych oczek. Uczeń wygra punkt, jeśli typowanie okaże się trafne.

Najpierw każdy z uczniów rzuca swoimi dwiema (małymi) kostkami i zlicza oczka na górnych ścianach leżących kostek (oblicza sumę dwóch liczb). Następnie kilka razy powtarzamy grę (dwiema kostkami rzuca prowadzący, a wcześniej uczniowie obstawiają sumę). Dzieci oswajają się z regulaminem gry. Przed nami odkrywanie podobieństwa tej gry i TOTO-LOTKA, a także dyskusja, czy wielkość rzucanych kostek ma tu znaczenie[5].

Na początku gry każdy z uczniów podejmuje decyzję co do obstawianej liczby. Rozstrzygamy, że jest 11 dopuszczalnych decyzji. Stawianie na liczbę można realizować, skreślając ją w poniższej tabeli.

2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

[4]W domu dzieci (przy pomocy rodziców) zapoznały się z regulaminem TOTO -LOTKA (LOTTO) i przynoszą na lekcję dwie jednakowe kostki.

[5]Kostki nauczyciela są duże, żeby cała klasa widziała co się dzieje na stole.

W grze stawia się na wynik pewnego doświadczenia losowego. Liczba oczek wyrzuconych dwiema kostkami stanowi wylosowaną liczbę. Jest to gra losowa, która przypomina TOTO-LOTKA. Debatujemy teraz nad analogiami między naszą grą a TOTO-LOTKIEM. Tabela, w której skreśla się obstawianą liczbę, przypomina kupon do gry. I ten szczegół jest dla dzieci najważniejszym faktem przemawiającym za podobieństwem tej gry i TOTO-LOTKA. Zauważamy, jak ważny jest tu czas. Najpierw trzeba „wypełnić kupon", potem następuje „losowanie liczby" (rzut kostkami), a potem rozdaje się wygrane punkty. Analogiczne procedury pojawiają się w TOTO-LOTKU, tylko zamiast punktu wygrywa się tam pieniądze. Odkrywanie wspomnianych analogii również zalicza się do aktywności matematycznych.

W TOTO-LOTKU gracz stawia na wynik losowania 6 liczb z 49. Wszystkie wyniki tego losowania są jednakowo prawdopodobne, jest więc obojętne, na który z nich się postawi[6]. Wyniki, na które można stawiać w naszej grze, nie są jednakowo prawdopodobne. Tę ich „stochastyczną własność" odkryjemy na lekcji za pomocą zebranych danych empirycznych.

Wyniki bardzo wielu powtórzeń rzutu dwiema jednakowymi (ale realnymi) kostkami staną się na lekcji podstawą do formułowania pewnych wniosków na temat modelu probabilistycznego rzutu dwiema kostkami.

Każdy uczeń powtarza rzut swoimi dwiema kostkami 10 razy i po każdym rzucie stawia w tabeli kreskę pod tą liczbą, która łącznie wypadła na dwóch kostkach.

2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

Zliczamy kreski w poszczególnych kolumnach i dane od wszystkich uczniów opracowujemy (nanosimy) w podobnej tabeli zbiorczej.

Oszacowaniem prawdopodobieństwa, że coś zdarzy się w (bliższej lub dalszej) przyszłości, jest częstość, z jaką to coś zdarzało się w przeszłości. Znów czas odgrywa w tych wnioskowaniach ważną rolę. Są to

[6]Jeden z uczniów stwierdza, że szanse najgorszego z matematyki ucznia na główną wygraną w TOTO-LOTKU są takie same jak szanse nauczyciela (jeśli tylko obaj poprawnie wypełnili kupon, skreślając na nim 6 liczb z 49).

wnioskowania *a posteriori*, w stochastyce takie szacowanie nazywa się *estymacją*.

Niektóre z liczb wyrzuconych oczek uznajemy za *mało prawdopodobne* (bo wypadały rzadko), inne za *bardziej prawdopodobne* (bo wypadały częściej) lub za *mniej prawdopodobne* (bo wypadały rzadziej). Sumę 7 uznajemy za *najbardziej prawdopodobną* (bo wypadała najczęściej). Mówimy tu jedynie o jakościowych ocenach prawdopodobieństwa wyników rzutu dwiema kostkami.

Z pewnych faktów z przeszłości wynikają określone wnioski na temat przyszłości. Jeśli planujemy za chwilę rzucić dwiema kostkami, to:

- najbardziej prawdopodobne jest, że wypadnie łącznie 7 oczek;
- wyrzucenie 2 albo 12 oczek jest mało prawdopodobne;
- wyrzucenie 5 oczek jest bardziej prawdopodobne niż 2 itd.

To są pewne, odkryte *a posteriori*, własności matematycznego modelu rzutu dwiema jednakowymi kostkami. Teraz pora na fazę interpretacji. Chodzi o wnioski na temat decyzji co do obstawianej sumy. Najbardziej opłaca się postawić na liczbę 7. Nie warto stawiać na sumę 2, nie warto stawiać na sumę 12. Bardziej niż na sumę 2 opłaca się stawiać na sumę 5.

W naszej grze, którą nazywamy TOTO-LOTKIEM Z DWIEMA KOSTKAMI, istnieją decyzje lepsze i gorsze, istnieje decyzja najlepsza, czyli *optymalna* (stawiam na 7 oczek). I to w istotny sposób odróżnia naszą grę od TOTO-LOTKA.

Prawdopodobieństwo (ale w ocenie jakościowej) stało się na tej lekcji narzędziem wyłaniania optymalnej decyzji. To prawdopodobieństwo ukazaliśmy w *aspekcie częstościowym*, czyli *statystycznym*. Dalej wspomnimy o *aspekcie miarowym* prawdopodobieństwa, czyli *geometrycznym*.

W poniższej tabeli pod liczbą oczek wpisano prawdopodobieństwo uzyskania tej liczby w rzucie dwiema kostkami:

2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

Ta tabela prezentuje model probabilistyczny rzutu dwiema kostkami i jest „bankiem informacji” o tym rzucie, czyli o naszym losowaniu liczby (Płocki, 2005: 393–394).

Są w niej informacje o tym:

- jakie mogą być wylosowane liczby (a więc na co można stawiać w grze);
- jakie są szanse tych liczb w losowaniu (na co warto stawiać).

Przykład 4. [TOTO-LOTEK W JEDNĄ KOSTKĄ] Rozważmy prostszą wersję gry typu TOTO-LOTKA. W grze stawia się na wynik rzutu jedną kostką i wygrywa punkt, jeśli typowanie okaże się trafne. Teraz istnieje 6 decyzji co do obstawianej liczby. Obstawić liczbę, to znaczy skreślić ją na kuponie.

1	2	3	4	5	6

Te liczby (jako wyniki rzutu kostką) są jednakowo prawdopodobne, a zatem jest obojętne, na którą liczbę się postawi. W tej grze – podobnie jak w TOTO-LOTKU – nie ma optymalnej decyzji.

3.3. Własność w_7 – refleksja *a posteriori* i matematyczne odkrycie

Za chwilę rzucimy kostką. Liczba oczek na górnej ścianie kostki po jej upadku jest wielkością (zmienną) losową. Liczba oczek na dolnej ścianie kostki po jej upadku jest także zmienną losową. Wydaje się oczywistym, że suma liczb oczek na czterech bocznych ścianach kostki po jej upadku jest także zmienną losową.

Odkrycie (dla ucznia raczej nieznanego i nieoczekiwanego) faktu, że suma liczb oczek na czterech bocznych ścianach rzuconej kostki nie jest zmienną losową, a także odkrycie własności w_7, może być na lekcji inspirowane matematyczną refleksją i to połączoną z dozą emocji, dzięki prostym turniejom.

Turniej 1. Każdy uczeń stawia wieżę z trzech kostek i zwycięża ten, kto na bokach swojej wieży ma najwięcej oczek. Zwycięzcy nie można wyłonić.

Turniej 2. Każdy uczeń rzuca kostką, a zwycięża ten, kto na bocznych ścianach leżącej kostki ma najwięcej oczek. Zwycięzcy nie daje się wyłonić.

Turniej 3. Zwycięży ten uczeń, któremu uda się tak ułożyć na stole kostkę, że na bocznych ścianach będzie miał najwięcej oczek. Jest 6 możliwych ułożeń kostki na stole i w każdym jest na czterech bocznych ścianach 14 oczek.

Tak rodzą się pytania:

- Dlaczego każda wieża ma na bocznych ścianach tyle samo oczek?
- Dlaczego każdy rzut kostką w turnieju 2. kończy się sumą 14?
- Jak to wytłumaczyć na gruncie matematyki?

Mowa tu o *refleksji a posteriori* (Płocki, 2005: 264).

W turnieju 2. suma liczb oczek na czterech bocznych ścianach kostki nie zależy od przypadku (nie jest zmienną losową) i wynosi 14, bo 4 boczne ściany kostki tworzą dwie pary ścian przeciwległych, a na takich dwóch ścianach jest łącznie 7 oczek (własność w_7). Liczba oczek na bocznych ścianach wieży nie zależy od ułożenia kostek i jest iloczynem liczby kondygnacji i liczby 14.

Podobną refleksję i odkrycie własności w_7 kreuje sztuczka z kostką.

Przykład 5. Każdy uczeń ma na lekcji swoją kostkę oraz małą kartkę. Na znak

- rzuca swoją kostką i zapamiętuje liczbę wyrzuconych oczek (liczba s_1),
- odwraca leżącą kostkę i do liczby s_1 dodaje liczbę oczek na górnej ścianie odwróconej kostki (tak powstaje suma s_2),
- znów rzuca tą kostką i do ostatniej sumy dodaje liczbę wyrzuconych oczek (suma s_3),
- ostatnią sumę s_3 uczeń zapisuje na swojej kartce i kartkę odwraca.

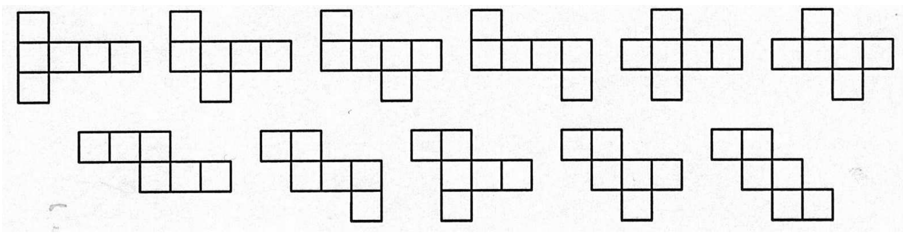
Jako prowadzący lekcję podchodzę do każdego z uczniów, rzucam jego kostką, zamyślam się i wpisuję na odwróconej kartce pewną liczbę. Teraz każdy z uczniów konstatuje, że na obu stronach swej kartki są te same liczby. Wywołane tym faktem zaskoczenie rodzi pytania:

- Jak to możliwe, że nasz pan umie odgadywać te liczby? Jak to wytłumaczyć?

Zauważ, że s_2 jest sumą liczb oczek na dwóch przeciwległych ścianach kostki, zatem $s_2 = 7$, a s_3 jest sumą tej liczby 7 i liczby oczek wyrzuconych w drugim rzucie, a tę liczbę nauczyciel poznaje, podchodząc do stołu. Odgadywana liczba s_3 jest więc sumą liczby oczek na górnej ścianie leżącej kostki i liczby 7. Samo rzucanie kostką przez prowadzącego i zaduma nad wynikiem tego rzutu mają stwarzać pozory tajemniczości. Istotna jest tu własność w_7.

3.4. Tworzenie papierowej kostki z siatki sześcianu może być aktywnością (także) matematyczną

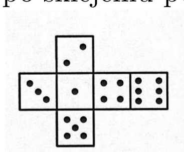
Na lekcji będziemy posługiwać się gotowymi, plastikowymi kostkami, ale ważną rolę w matematycznej edukacji może pełnić tworzenie przez ucznia swojej kostki z papierowej siatki sześcianu (rysunek 1.). I chodzi tu nie tyle o samą kostkę, ile o aktywności związane z jej tworzeniem.



Rys. 1. Siatka sześcianu

Mamy tu na uwadze takie konkretne czynności, jak:

- tworzenie papierowej siatki sześcianu wraz z zakładkami potrzebnymi do sklejenia sześcianu (wzdłuż których odcinków tej siatki muszą one być?);
- rozmieszczanie oczek w kwadratach tej siatki (przed jej zginaniem i sklejeniem) tak, by po sklejeniu powstała klasyczna kostka.

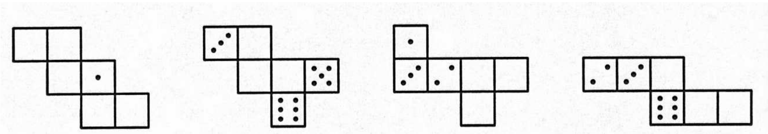


Rys. 2. Siatka kostki

W przypadku gotowej, ale jeszcze niewyciętej siatki, aktywnością matematyczną jest weryfikacja, czy kostka sklejona (za chwilę) z tej siatki będzie klasyczną kostką. Nanoszenie oczek na siatkę sześcianu przed jej sklejeniem jest inną aktywnością matematyczną.

Zadanie 3.

W każdej z jedenastu siatek sześcianu na rysunku 1 wybierz jeden kwadrat i zaznacz w nim oczko. Rozmieść pozostałe liczby oczek w kwadratach siatki, aby po jej sklejeniu powstała kostka mająca własność w_7.



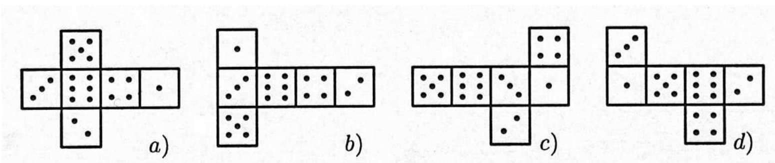
Rys. 3. Cztery niedokończone siatki kostki

Zadanie 4.

Na rysunku 3. mamy cztery siatki sześcianu. W niektórych kwadratach każdej z tych siatek znajdują się oczka. Zapełń oczkami puste kwadraty każdej siatki ale tak, aby po jej sklejeniu powstała kostka klasyczna. Które ściany na kostce (po sklejeniu jej z danej siatki) będą sąsiednie dla ściany z czterema oczkami, a które przeciwległe?

Zadanie 5.

Na stole leży kostka K_0. Na jej przedniej ścianie jest 6 oczek, na górnej jedno, na prawej bocznej zaś są 4 oczka. Na rysunku 4. mamy cztery siatki kostki. Które z nich nie są siatką kostki K_0 i dlaczego?



Rys. 4. Siatki czterech kostek sześciennych

Ściany kostki K_0 z jednym oczkiem i z sześcioma (jako ściany przednia i górna) są ścianami sąsiednimi. Kostka K_0 nie mogła zatem powstać ani z siatki na rysunku 4*a*), ani z siatki na rysunku 4*c*), ani na rysunku 4*d*), bo na kostkach powstałych z tych siatek ściany z 1 i z 6 oczkami są przeciwległe. Siatką kostki K_0 może być siatka na rysunku 4*b*), ale nie musi.

3.5. Kostka sześcienna a arytmetyka i logika

[IMPLIKACJA JAKO WYNIKANIE] Jeśli p i q są zdaniami w sensie logicznym, to zdaniem w sensie logicznym jest implikacja $p \Longrightarrow q$ (*jeżeli p, to q*). Jeśli oba zdania p i q są prawdziwe, to wtedy prawdziwe jest również zdanie $p \Longrightarrow q$. Tę implikację prawdziwą traktuje się mylnie jako wynikanie, stwierdzając, że *ze zdania p wynika zdanie q*.

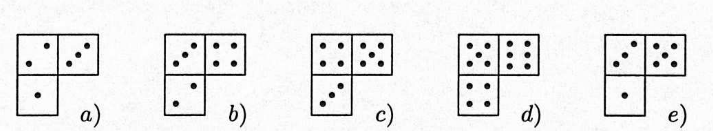
Każde wynikanie jest implikacją prawdziwą, ale nie na odwrót. Jeśli p jest zdaniem *Żywiec leży nad Sołą*, q zaś jest zdaniem *Środek okręgu nie leży na tym okręgu*, to implikacja $p \Longrightarrow q$ jest zdaniem prawdziwym, bo oba zdania p i q są prawdziwe. Ale z faktu, że *Żywiec leży nad Sołą*, nie wynika, że *środek okręgu nie leży na tym okręgu*. W tej implikacji między jej poprzednikiem a następnikiem nie ma stosunku wynikania, bo nie ma między nimi więzi treściowej (Płocki, Nawolska, 2016: 106).

[LOGIKA KOSTKI] Trzy ściany kostki mogą mieć wspólny wierzchołek. Mówmy, że takie trzy ściany kostki *schodzą się w tym wierzchołku*. Dwie ściany kostki, które mają wspólną krawędź, nazywamy *sąsiednimi*. Ściany, które nie mają wspólnej krawędzi są to *ściany przeciwległe*.

Z własności sześcianu wynika, że:

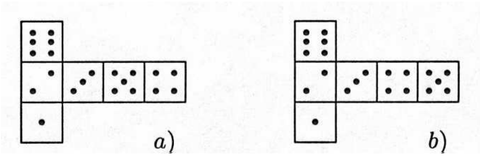
1. wśród każdych trzech ścian kostki są dwie ściany sąsiednie;
2. jeśli trzy ściany kostki schodzą się w jednym wierzchołku, to żadne dwie spośród nich nie są przeciwległe;
3. jeśli wśród trzech ścian kostki są dwie przeciwległe, to te trzy ściany nie mogą się schodzić w jednym wierzchołku;
4. jeśli trzy ściany kostki schodzą się w jednym wierzchołku, to trzy pozostałe też schodzą się w jednym wierzchołku;
5. jeśli trzy ściany kostki schodzą się w jednym wierzchołku i jedną z nich zastąpimy ścianą do niej przeciwległą, to te trzy ściany także schodzą się w jednym wierzchołku.

Przykład 6. Na rysunku 5. mamy fragmenty pięciu siatek kostki, każdy obejmuje trzy ściany kostki schodzące się w jednym wierzchołku. Które z tych fragmentów mogą, a które nie mogą być częścią siatki klasycznej kostki?



Rys. 5. Fragmenty pięciu siatek kostki sześciennej

Rysunek 5*a* może, ale nie musi być fragmentem siatki klasycznej kostki. Uzasadnienie tego prezentuje rysunek 6.



Rys. 6. Siatki dwóch różnych kostek

W przypadku fragmentu z rysunku 5*b*) na trzech ścianach schodzących się w jednym wierzchołku są liczby 2, 3 i 4. Żeby kostka miała własność w_7, jej ściany z liczbami oczek 3 i 4 muszą być przeciwległe, a one takie nie są, bo schodzą się w jednym wierzchołku. Tego fragmentu siatki nie da się uzupełnić tak, aby kostka sklejona z tej siatki miała własność w_7.

Ostatnie argumentacje opierają się na twierdzeniu:

* *Jeżeli wśród trzech ścian schodzących się w jednym wierzchołku kostki są dwie, na których jest łącznie* 7 *oczek, to ta kostka nie jest klasyczna.*

Niech S_1 oznacza ścianę z jednym oczkiem, S_2 – ścianę z dwoma oczkami, S_3 – ścianę z trzema oczkami itd., S_6 – ścianę z sześcioma oczkami.

Zadanie 6.

Na trzech bocznych ścianach leżącej na stole kostki są 3 oczka, 2 oczka i jedno. Czy może to być klasyczna kostka? Dlaczego?

Przykład 7. [WŁASNOŚĆ w_7 A ŚCIANY Z $1, 2$ I 3 OCZKAMI] Załóżmy, że na każdych dwóch przeciwległych ścianach kostki K jest łącznie 7 oczek. Rozważmy trzy ściany S_1, S_2 i S_3. Wśród tych ścian są dwie sąsiednie. Załóżmy, że są to ściany S_1 i S_2 (gdyby były to ściany S_1 i S_3 albo S_2 i S_3, to rozumowanie będzie analogiczne). Zbadajmy, jaką może być trzecia ściana schodząca się w jednym wierzchołku ze ścianami S_1 i S_2.

1. Nie może to być ściana S_6, bo jest przeciwległa do ściany S_1, a wśród trzech ścian schodzących się w jednym wierzchołku nie ma dwóch przeciwległych.
2. Z tych samych powodów nie może to być ściana S_5, bo jest przeciwległa do ściany S_2.

W rachubę wchodzą zatem tylko dwie ściany: S_3 i S_4. Jeśli jest to ściana S_4, to do niej przeciwległa (jest to ściana S_3) też schodzi się w jednym wierzchołku ze ścianami S_1 i S_2. W obu przypadkach ściany z jednym, dwoma i trzema oczkami schodzą się w jednym wierzchołku. Wykazaliśmy zatem, że:

* *Jeśli na każdych dwóch przeciwległych ścianach kostki jest łącznie* 7 *oczek, to ściany z liczbami oczek* $1, 2$ *i* 3 *schodzą się w jednym wierzchołku.*

Zadanie 7.

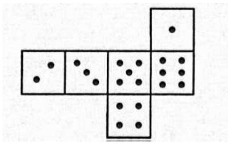
> Narysuj siatkę takiej kostki, której ściany z liczbami oczek 1, 2 i 3 nie schodzą się w jednym wierzchołkiu. Czy ta kostka może być klasyczna?

Zauważ, że z prawdziwości ostatniej implikacji wynika prawdziwość jej kontrapozycji, czyli implikacji:

* *Jeżeli ściany z liczbami oczek 1, 2 i 3 na kostce nie schodzą się w jednym wierzchołku, to taka kostka nie ma własności* w_7.

Zadanie 8.

> Udowodnij, że prawdziwa jest implikacja:
> * *Jeżeli kostka ma własność* w_7*, to ściany z liczbami oczek* $4, 5$ *i* 6 *schodzą się w jednym wierzchołku.*
> Czy jest prawdziwa implikacja odwrotna? Co ma do tego pytania rysunek 7.



Rys. 7. Siatka kostki, która nie ma własności w_7

3.6. Liczby oczek na trzech ścianach kostki schodzących się w jednym wierzchołku i nauka o funkcji

Przypiszmy każdemu wierzchołkowi kostki K sumę liczb oczek na trzech ścianach schodzących się w tym wierzchołku. Na zbiorze ośmiu wierzchołków kostki K określamy tym samym pewną funkcję f_K.

Jeżeli w jednym wierzchołku kostki K schodzą się ściany z 1, 2 i 3 oczkami, to wartością funkcji f_K jest suma $1 + 2 + 3$, czyli liczba 6 jest wtedy najmniejszą wartością (czyli minimum) funkcji f_K.

Jeśli w jednym wierzchołku kostki K schodzą się ściany z 4, 5 i 6 oczkami, to wartością funkcji f_K jest suma $4+5+6$, czyli liczba 15 jest wtedy największą wartością (czyli maksimum) funkcji f_K.

Z logiki oraz dotychczasowych rozważań o kostce wynika zatem, że:

* *Jeśli kostka K ma własność w_7, to liczby* 6 *i* 15 *są wartościami funkcji* f_K.

* *Jeśli 6 lub 15 nie jest wartością funkcji f_K, to kostka nie ma własności* w_7.

Zadanie 9.

> Twoja kostka jest klasyczna. Które liczby ze zbioru $\{6, 7, \dots, 14, 15\}$ są wartościami funkcji f_K dla twojej kostki K?

Jest 8 wierzchołków kostki i każdy jest wspólny dla pewnych trzech jej ścian. Dla każdego wierzchołka kostki wartość funkcji f_K jest sumą trzech różnych liczb ze zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. W rachubę wchodzą tu więc sumy:

$$
\begin{aligned}
&1+2+3,\ 1+2+4,\ 1+2+5,\ 1+2+6,\\
&1+3+4,\ 1+3+5,\ 1+3+6,\\
&1+4+5,\ 1+4+6,\\
&1+5+6,\\
&2+3+4,\ 2+3+5,\ 2+3+6,
\end{aligned}
$$

$2+4+5$, $2+4+6$,
$2+5+6$,
$3+4+5$, $3+4+6$,
$3+5+6$,
$4+5+6$.

Możliwych sum jest 20, a wierzchołków tylko 8, zatem aż co najmniej 12 z tych dwudziestu sum nie są wartościami funkcji f_K. Które to są sumy?

Załóżmy, że kostka ma własność w_7. Żadne dwie spośród trzech ścian schodzących się w wierzchołku kostki (i to w którymkolwiek!) nie są przeciwległe. Jeśli zatem kostka K ma własność w_7, to z rozważań odpadają te sumy, w których są dwa składniki dające w sumie 7. Jest 12 takich sum, pozostało więc 8 następujących sum: $1+2+3$, $1+2+4$, $1+3+5$, $1+4+5$, $2+3+6$, $2+4+6$, $3+5+6$ i $4+5+6$. Są to zatem liczby: $6, 7, 9, 10, 11, 12, 14$ i 15. Czy każda z nich jest wartością funkcji f_K? Nie ma wśród nich liczby 8 i nie ma liczby 13. Rodzą się teraz pytania:

- Dlaczego, jeśli kostka ma własność w_7, to wśród wartości funkcji f_K nie ma liczb 8 i 13?
- Jakie są wartości funkcji f_K w przypadku kostki, która nie ma własności w_7?
- Kiedy f_K jest funkcją różnowartościową?

Wartości funkcji f_K są sumami trzech różnych liczb ze zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Liczbę 8 można przedstawić w postaci takiej sumy tylko na dwa sposoby: $8 = 1 + 2 + 5$ i $8 = 1 + 3 + 4$. Zauważ, że $2 + 5 = 7$ i $3 + 4 = 7$. Jeśli kostka ma własność w_7, to wśród ścian schodzących się w jednym wierzchołku nie mogą być ani ściany z 2 i z 5 oczkami, ani z 3 i 4 oczkami, a zatem:

* *Jeśli kostka K ma własność w_7, to liczba* 8 *nie jest wartością funkcji f_K.*

Jest $13 = 2 + 5 + 6$ i $2 + 5 = 7$ oraz $13 = 3 + 4 + 6$ i $3 + 4 = 7$, a zatem:

**Jeśli kostka K ma własność w_7, to liczba* 13 *nie jest wartością funkcji f_K.*

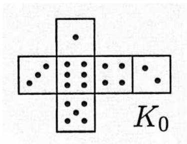
Obie powyższe implikacje są prawdziwe i obie są wynikaniami. Można je zredukować do jednego wynikania:

**Jeżeli kostka K ma własność* w_7*, to ani liczba* 8*, ani liczba* 13 *nie jest wartością funkcji* f_K*.*

Z faktu, że wynikaniem jest ostatnia implikacja, można wnioskować, że wynikaniem jest także jej kontrapozycja, czyli

* *Jeśli wśród wartości funkcji* f_K *jest liczba* 8 *lub liczba* 13*, to kostka K nie posiada własności* w_7*.*

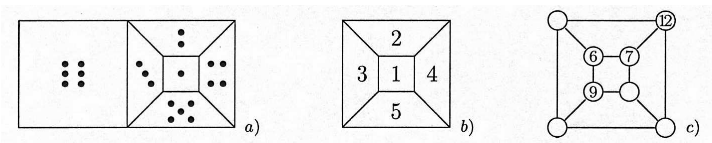
W powyższych dysputach o kostce pojawiła się implikacja przeciwstawna oraz negacja koniunkcji, a więc elementy logiki.



Rys. 8. Kostka powstała z tej siatki nie ma własności w_7

Przykład 8. Kostka K_0, której siatkę mamy na rysunku 8, nie ma własności w_7. W dwóch wierzchołkach tej kostki schodzą się trzy ściany o jednakowej sumie liczb oczek ($1+4+6$ i $2+4+5$). Funkcja f_K nie jest różnowartościowa. W przypadku tej kostki K_0 liczba 12 nie jest wartością funkcji f_K.

[PŁASKI OBRAZ KOSTKI I PREZENTACJA FUNKCJI f_K] Załóżmy, że kostka zrobiona jest z przeźroczystego materiału, a więc oczka są widoczne również z wnętrza sześcianu, z którego kostka powstała. Odchylmy przednią ścianę w lewo i spójrzmy z perspektywy na powstały obiekt. Taki widok (dla pewnej kostki) mamy na rysunku 9*a*). Opisane czynności przypominają przejścia od sześcianu do jego perspektywicznego rzutu.

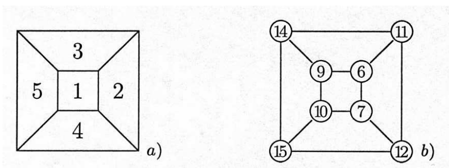


Rys. 9. Kostka w perspektywie z otwartą ścianą – płaski obraz kostki

Kostka przedstawiona na rysunku 9*a*) ma na przedniej ścianie 6 oczek (jest to ta odchylona ściana), na górnej 2, a na prawej bocznej 4 oczka. Ta kostka K_a ma własność w_7.

Na ten płaski obraz kostki składa się 6 figur: mały kwadrat, cztery trapezy i duży kwadrat. Te figury reprezentują ściany kostki. Mały kwadrat przedstawia tylną ścianę, trapez nad nim – ścianę górną, trapez z jego prawej strony – ścianę boczną prawą, trapez pod nim – ścianę dolną, trapez z jego lewej strony – ścianę lewą, a duży kwadrat prezentuje ścianę przednią. W małym kwadracie wpiszmy liczbę 1, w czterech trapezach rozmieśćmy liczby od 2 do 5 jako liczby oczek, duży kwadrat będzie reprezentował ścianę z sześcioma oczkami. Tę ścianę będziemy pomijać, zakładając, że jest na niej 6 oczek. W ten sposób otrzymujemy płaski obraz kostki (jest to inny obiekt niż siatka kostki). Ten płaski obraz kostki K wykorzystamy do prezentacji funkcji f_K.

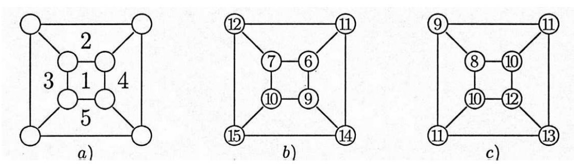
Na rysunku 9*b*) mamy płaski obraz kostki K_a z rysunku 9*a*). Na rysunku 9*c*) zaznaczono w każdym wierzchołku tej kostki kółko i w czterech z nich wpisano wartości funkcji f_K. Uzupełniając pozostałe kółka określimy funkcję f_K. Na rysunku 10. mamy płaski obraz klasycznej kostki K i funkcję f_K.



Rys. 10. Płaski obraz pewnej kostki K i prezentacja funkcji f_K

Zadanie 10.

Na rysunku 11*a*) mamy płaski obraz pewnej kostki K_a. Czy ta kostka ma własność w_7? W każdym wierzchołku znajduje się kółko. Wpisz w każde z tych kółek liczbę oczek na trzech ścianach schodzących się w wierzchołku z tym kółkiem.



Rys. 11. Płaski obraz pewnej kostki K_a oraz prezentacja funkcji f_K dla dwóch kostek

Dla każdych dwóch różnych wierzchołków kostki K_a wartości funkcji f_K są różne. Funkcja f_K jest różnowartościowa. Można wykazać, że:

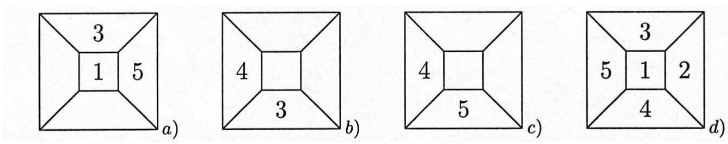
* *jeśli kostka K ma własność w_7, to funkcja f_K jest różnowartościowa,*

* *jeśli funkcja f_K nie jest różnowartościowa, to kostka K nie ma własności w_7.*

Zadanie 11.

> Dla każdego wierzchołka kostki K_b znamy liczbę oczek na trzech ścianach schodzących się w tym wierzchołku (zob. rysunek 11*b*)). Jest to jedyna informacja o tej kostce. Jaka to kostka? Uzupełnij ten rysunek liczbami oczek na ścianach tej kostki, wpisując je w trapezy i mały kwadrat na rysunku 11*b*)). Zrób to samo w przypadku kostki K_c, którą reprezentuje rysunek 11*c*)).

W przypadku kostki K_c z rysunku 11*c*) funkcja f_K nie jest różnowartościowa. Kostka K_c nie ma własności w_7.



Rys. 12. Niedokończone płaskie obrazy czterech kostek

Przykład 9. Rysunek 12*d*) jest płaskim obrazem kostki K_d, która ma na tylnej ścianie jedno oczko, na górnej 3 oczka, na dolnej 4 oczka, na prawej bocznej 2 oczka, na lewej bocznej 5 oczek. Na przedniej ścianie tej kostki jest 6 oczek. Ta kostka K_d ma własność w_7.

Zadanie 12.

> Czy da się tak uzupełnić liczbami puste figury na rysunku 12*a*), aby w ten sposób określona kostka miała własność w_7? Czy da się to zrobić w przypadku rysunku 12*b*)? A w przypadku rysunku 12*c*)?

Dwa trapezy z liczbami 3 i 4 na rysunku 12*b*) przedstawiają dwie sąsiednie ściany (dolną i lewą boczną). Te liczby dają w sumie 7. Istnienie takich dwóch sąsiednich ścian dowodzi, że kostka nie jest klasyczna. Rysunku 12*b*) nie da się tak uzupełnić, aby był płaskim obrazem kostki klasycznej.

3.7. Zliczanie oczek na kostkach – matematyka bez rachunków

W szkolnych ujęciach rachunku prawdopodobieństwa jest wiele rachunków, ale niewiele matematyki. Wyjdźmy od elementarnych zadań arytmetycznych z klasyczną kostką. Będą to zadania na odejmowanie, dodawanie i mnożenie liczb naturalnych, ale kreujące inne aktywności matematyczne niż rachunki.

Zadanie 13.

> Ile jest wszystkich oczek na kostce? Jak to szybko policzyć?
> Ile jest oczek na trzech kostkach? A na pięciu?

Szybka odpowiedź wynika z własności w_7. Kostka ma trzy pary ścian przeciwległych, zatem na kostce klasycznej liczba oczek jest iloczynem $3 \cdot 7$.

Zadanie 14.

> Ile oczek musi być na górze kostki, żeby na jej dole było ich mniej?

Zadanie 15.

> Rzuć dwiema (trzema) kostkami i (nie odwracając leżących kostek) odgadnij, ile jest oczek na dolnych, niewidocznych ścianach kostek?

Zadanie 16.

> Ustaw dwie kostki na stole tak, aby na ich górnych ścianach
> a) było tyle samo oczek co na ich ścianach dolnych;
> b) było mniej oczek niż na ścianach dolnych.

Zadanie 17.

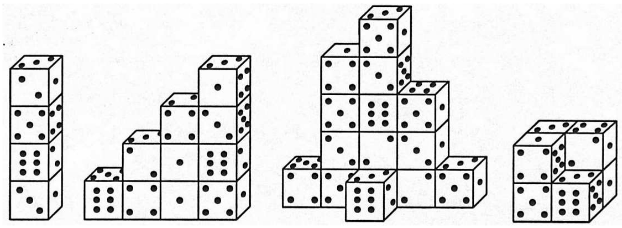
> Na górnych ścianach dwóch leżących kostek ma być o 4 oczka więcej niż na dolnych. Ułóż tak dwie kostki.

[WIEŻE, BRYŁY I BUDOWLE Z KOSTEK A ARYTMETYKA] Sklejając kostki ścianami, będziemy tworzyć pewne bryły geometryczne. Stawiając kostki jedna na drugiej, budujemy *wieżę*. Liczba postawionych kostek to jej wysokość. Jeśli mamy kilka wież, to przystawiając je do siebie (w odpowiedni sposób), otrzymamy bryłę, którą nazywamy *budowlą* *z kostek*. Jedną wieżę o wysokości 4 kostek i 3 budowle z kostek mamy na rysunku 13.

Ściana na dole wieży lub budowli oraz każda ściana (bryły, wieży lub budowli), która jest złączona (czasem sklejona) ze ścianą innej kostki, to są ściany zakryte. Zliczanie oczek na wszystkich zakrytych ścianach kostek staje się teraz treścią (nie tylko arytmetycznych i nie tylko rachunkowych) zadań.

Zadanie 18.

> Policz, ile jest łącznie oczek na zakrytych ścianach kostek w budowlach na rysunku 13.



Rys. 13. Cztery budowle z kostek do gry

Przykład 10. Bryłą jest przestrzenny krzyż sklejony z siedmiu kostek. Jedna z kostek tworzy środek krzyża. Każda z sześciu pozostałych kostek została doklejona do tej kostki tak, że na sklejonych ze sobą ścianach są jednakowe liczby oczek. Sklejone ze sobą ściany dwóch kostek to są zakryte ściany. Wszystkie ściany środkowej kostki są zakryte. Każda z pozostałych kostek ma jedną ścianę zakrytą. Jak szybko odpowiedzieć na pytanie, ile jest łącznie oczek na zakrytych ścianach wszystkich kostek, a ile na niezakrytych?

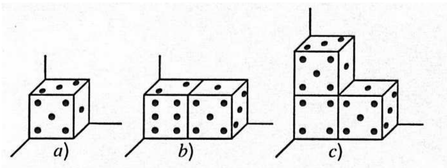
Na wszystkich siedmiu kostkach krzyża jest łącznie $7 \cdot 21$, czyli 147 oczek. Zliczmy oczka na zakrytych ścianach. Wszystkie ściany środkowej kostki są zakryte, a więc na tej kostce jest 21 zakrytych oczek. Tyle samo jest oczek na zakrytych ścianach sześciu doklejonych kostek.

Zadanie 19.

> Rzuć kostkę na stolik przysunięty do ściany i szybko dosuń leżącą kostkę do ściany. Dwie ściany kostki, dolna i tylna są teraz zakryte. Ile jest łącznie oczek na tych niewidocznych ścianach kostki?

Zadanie 20.

Na rysunku 14. kostki są przystawione do kąta utworzonego przez trzy ściany. Ile jest oczek na niewidocznych ścianach?



Rys. 14. Budowle z kostek w kącie

Zainteresujmy się liczbą oczek na zakrytych ścianach kostek, z których powstała wieża. Mówimy, że wieża powstała z k kostek ma wysokość k.

Zadanie 21.

Postaw taką wieżę o wysokości 7, która ma maksymalną liczbę oczek na zakrytych ścianach swych kostek.

Zadanie nie wydaje się łatwe. Aby odkryć pewną prawidłowość, zacznijmy od niższych wież tego typu i ścian zakrytych. Zauważmy, że:

- wieża o wysokości 2 ma 3 zakryte ściany, są to dwie przeciwległe ściany parteru i dolna ściana 1. piętra;
- wieża o wysokości 3 ma 5 zakrytych ścian, są to: dwie przeciwległe ściany parteru, dwie przeciwległe ściany 1. piętra i dolna ściana 2. piętra;
- wieża o wysokości 4 ma 7 zakrytych ścian, są to: dwie przeciwległe ściany parteru, dwie przeciwległe ściany 1. piętra, dwie przeciwległe ściany 2. piętra i dolna ściana 3. piętra.

Zadanie 22.

Masz dowolną wieżę o wysokości k. Co wystarczy zrobić, aby otrzymać wieżę o wysokości $(k + 1)$, która ma na $(2k + 1)$ zakrytych ścianach swoich kostek maksymalną liczbę oczek? Rozważ $k = 2$ i $k = 3$.

Jeśli na górze dowolnej wieży o wysokości 2 położymy trzecią kostkę z 6 oczkami na dół, to powstanie wieża o wysokości 3 i to z maksymalną liczbą oczek na zakrytych ścianach. Ta liczba jest sumą $7 + 7 + 6$.

Jeśli na górze dowolnej wieży o wysokości 3 położymy (ścianą z 6 oczkami w dół) czwartą kostkę, to powstanie wieża o wysokości 4 i to z maksymalną liczbą oczek na zakrytych ścianach. Ta liczba jest sumą $7 + 7 + 7 + 6$.

Odkrywamy tu pewną prawidłowość, dzięki której „produkcja" wież z maksymalną liczbą oczek na zakrytych ścianach staje się prosta.

Aby postawić wieżę o wysokości 7 i to z maksymalną liczbą oczek na zakrytych ścianach, wystarczy postawić dowolną wieżę z 6 kostek i na jej górze położyć kostkę ścianą z 6 oczkami w dół. Mowa tu o matematycznym odkryciu.

Zadanie 23.

> Paweł rzucił dwa razy kostką, ale nie zdradził, ile oczek wypadło w pierwszym rzucie, a ile w drugim. Oznajmił tylko, że w pierwszym rzucie wypadło o 5 oczek więcej niż w drugim. Jakim wynikiem zakończył się ten rzut?

Zadanie 24.

> Gaweł rzucił dwiema kostkami, białą i czerwoną, ale nie zdradził, ile oczek wypadło na białej, a ile na czerwonej kostce. Powiedział tylko, że na białej kostce wypadły o 3 oczka mniej niż na czerwonej, a razem na obu kostkach wypadło 7 oczek. Ile oczek wypadło na białej, a ile na czerwonej kostce?

W kontekście zadania 1. o losowaniu reprezentanta klasy postawiliśmy pytanie o to, kto, w jakiej sytuacji i po co mógł takie zadanie sformułować. Takie pytanie ma rację bytu wtedy, gdy treść zadania wkracza w realny świat. W przypadku zadań o liczbach oczek na ścianach budowli z kostek pytanie o praktyczne motywacje nie ma sensu. Tu chodzi o ćwiczenie teorii, a nie o jej stosowanie w praktyce.

4. Kostki a stochastyka wokół nich i wokół nas

Będziemy analizować i opisywać na gruncie matematyki dwukrotny rzut kostką i rzut dwiema kostkami, czterokrotny rzut kostką, sześciokrotny rzut kostką i równoczesny rzut sześcioma kostkami. Jeśli A jest niepustym zbiorem a n ustaloną liczbą naturalną, to zapis A^n oznacza zbiór wszystkich ciągów n-wyrazowych, których wyrazami są elementy zbioru A.

[MODEL n-KROTNEGO RZUTU KOSTKĄ] Wynik n-krotnego rzutu kostką jest n-wyrazowym ciągiem o wyrazach ze zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ (jego j-ty wyraz jest liczbą oczek wyrzuconych w j-tym rzucie). Za każdym razem każda z liczb oczek jest jednakowo prawdopodobna, a zatem każdy wynik n-krotnego rzutu kostką jest jednakowo prawdopodobny. Wszystkich wyników jest 6^n, a zatem prawdopodobieństwo każdego jest równe $\frac{1}{6^n}$. Zauważmy, że $\frac{1}{6^n} = (\frac{1}{6})^n$.

Modelem n-krotnego rzutu kostką jest więc para (Ω_n, p_n), gdzie

$$\Omega_n = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}^n \quad \text{i} \quad p_n(\omega) = (\tfrac{1}{6})^n \quad \text{dla} \quad \omega \in \Omega_n.$$

4.1. Stochastyka kostki – zdarzenia prawie niemożliwe

[ZDARZENIE PRAWIE NIEMOŻLIWE] Zdarzenie A związane z doświadczeniem losowym δ nazywamy *prawie niemożliwym*, jeżeli w modelu probabilistycznym doświadczenia δ jego prawdopodobieństwo jest mniejsze od 0,05. We wnioskowaniach statystycznych liczbę $\alpha = 0,05$ nazywa się *poziomem istotności*.

[ZDARZENIE PRAWIE PEWNE] Zdarzenie B związane z doświadczeniem losowym δ nazywamy *prawie pewnym*, jeżeli w modelu probabilistycznym doświadczenia δ jego prawdopodobieństwo jest większe od 0,95.

Uwaga: W stochastyce zdarzenie prawie niemożliwe nazywa się *zdarzeniem praktycznie niemożliwym*, a zdarzenie prawie pewne nazywa się *zdarzeniem praktycznie pewnym*. W „matematyce dla każdego" nazwy *zdarzenie prawie niemożliwe* i *zdarzenie prawie pewne* wydają się właściwsze.

Przykład 11. Z rzutem sześcioma kostkami zwiążmy dwa zdarzenia:
$A = \{$*wypadną wszystkie liczby oczek*$\}$,
$B = \{$*któraś z liczb oczek nie wypadnie na żadnej kostce*$\}$.

W pracy (Płocki, 2011a; s. 147) wykazuje się, że

$$P(A) = \frac{6!}{6^6} \approx 0,0154 \quad \text{i} \quad P(B) = 1 - P(A) \approx 0,9846,$$

czyli A jest zdarzeniem prawie niemożliwym, a B zdarzeniem prawie pewnym.

To są informacje dla nauczyciela. W „matematyce dla każdego" te probabilistyczne własności zdarzeń A i B odkryjemy *a posteriori*. Pojawia się pytanie: Komu i do czego mogą się przydać te matematyczne fakty?

[RYZYKO I SZANSE, SZCZĘŚCIE I PECH] Ilekroć wydarzy się coś, co jest prawie niemożliwe (a więc bardzo mało prawdopodobne) i co kojarzy nam się wyjątkowo pozytywnie, tylekroć mówimy o *szczęściu*. Jeśli wydarzy się coś, co jest prawie niemożliwe i co kojarzy nam się wyjątkowo negatywnie, to mówimy o *pechu*. Szczęście i pech mogą być treścią matematycznych zadań, które dotyczą zdarzeń prawie niemożliwych.

Podstawą wnioskowań dotyczących podejmowania decyzji bądź weryfikacji pewnych hipotez, jest fakt, że pewne zdarzenie (które zaszło) jest prawie niemożliwe. Wnioskowania te opierają się na następującej idei:

[ZASADA PRAKTYCZNEJ PEWNOŚCI] Jeżeli zdarzenie A związane z doświadczeniem losowym δ jest prawie niemożliwe, to możemy być praktycznie pewni, że ono nie zajdzie, gdy (za chwilę, jutro, za tydzień) wykonamy doświadczenie δ.

Przykład 12. Powtórz rzut sześcioma kostkami wiele razy i skonstatuj, że

- ani razu nie zaszło zdarzenie A;
- za każdym razem któraś z liczb oczek nie wypadła na żadnej kostce (a więc zaszło zdarzenie B).

Przykład 13. Na lekcji każdy z uczniów rzuca swoimi sześcioma kostkami i do góry rękę podnoszą ci, którzy uzyskali wynik sprzyjający zdarzeniu A. Nie ma ani jednej podniesionej ręki. Powtarzamy te czynności kilka razy. Nie ma ani jednej podniesionej ręki. Zdarzenie A prawie nie zachodzi. Ten fakt empiryczny, którego każdy uczeń osobiście doświadczył, jest podstawą do oceny prawdopodobieństwa zdarzenia A.

Jest prawie niemożliwe, aby w rzucie sześcioma kostkami *wypadły wszystkie liczby oczek* (zdarzenie A z przykładu 11). Przed rzutem kostkami możesz być praktycznie pewny, że zdarzenie A nie zajdzie. Sprawdziliśmy, że to się w praktyce potwierdza.

4.2. Miarowy aspekt prawdopodobieństwa w matematycznej edukacji dziecka a rzut sześcioma kostkami

Dalej skorzystamy z dwóch podstawowych faktów, gdy mówimy o „stochastyce dla każdego".

FAKT 1. Są dwa możliwe wyniki rzutu monetą: *wypadnie orzeł* albo *wypadnie reszka* i oba są jednakowo prawdopodobne.

FAKT 2. Wynik rzutu kostką jest liczbą wyrzuconych oczek. Jest 6 możliwych wyników i każdy jest jednakowo prawdopodobny.

Przykład 14.[BABKI I ZABŁĄKANE RODZYNKI A ŚWIAT PRZYPADKU] Rozważmy realną sytuację problemową. Po wymieszaniu ciasta z rodzynkami mama podzieliła ciasto na

- 2 równe kawałki (wersja 1.),
- 6 równych kawałków (wersja 2.),

i z każdego uformowała babkę. Przed włożeniem babek do piekarnika okazało się, że zabłąkał się jeden rodzynek i nie trafił do ciasta. Problem, co zrobić teraz z tym rodzynkiem, inspiruje (i motywuje) stochastyczne wnioskowania.

Na lekcji pada propozycja, by w wersji 1. z powrotem złączyć obie babki, dołączyć do ciasta ów rodzynek, ciasto od nowa wymieszać i podzielić na dwie równe części. Debatując nad losami jednego rodzynka, odkrywamy, że o tym, do której babki on trafi, rozstrzyga wyłącznie przypadek. Z faktu, że masy obu babek są równe, wynika, że każda z babek ma jednakowe szanse na to, że ów rodzynek do niej trafi.

Pojawia się pomysł wykorzystania monety do rozwiązania problemu z rodzynkiem i babkami. Dzieci proponują, by na stole obok jednej babki położyć kartkę z napisem *orzeł*, obok drugiej – kartkę z napisem *reszka*, a następnie rzucić monetą. Jeśli wypadnie orzeł, to ów zabłąkany rodzynek wciśnijmy do babki z napisem *orzeł*, jeśli *reszka*, to do babki z napisem *reszka*.

Pojawił się tu ciąg realnych czynności. Jest to sprawiedliwe losowanie jednej z dwóch babek, do której trafi rodzynek. Mamy sposób symulowania za pomocą monety losowego rozmieszczania rodzynka w dwóch babkach.

To odkrycie ma ciąg dalszy. Na drugiej części lekcji rozstrzygamy inny realny problem.

Zadanie 25.

> Za chwilę ma się rozpocząć mecz piłkarski. Sędzia ma rzucić monetą, ale nie ma przy sobie ani grosza. Czym i w jaki sposób można w tej sytuacji zastąpić monetę?

Dzieci proponują symulowanie rzutu monetą za pomocą kawałka ciasta i rodzynka.

Gdyby na początku ciasto podzielono na 6 równych części (wersja 2.), uformowano z nich 6 babek i gdyby zabłąkał się jeden rodzynek, to problem, co z nim zrobić, rozwiążemy za pomocą kostki. Ponumerujmy babki liczbami od 1 do 6, rzućmy kostką i liczbę wyrzuconych oczek potraktujemy jako numer babki, do której trafi zabłąkany rodzynek.

Te czynności można niejako odwrócić. Gdyby zginęła ci kostka do gry, to możesz ją „zrobić" z kawałka ciasta i rodzynka. Wystarczy wymieszać ciasto z rodzynkiem, podzielić na 6 równych kawałków, te kawałki ponumerować od 1 do 6 i rozstrzygnąć, w którym kawałku znalazł się ów rodzynek. Jeśli jest on w kawałku numer j, to możemy mówić, że w rzucie kostką *wypadło j oczek*. Uczeń mówi, że *zrobiliśmy kostkę z kawałka ciasta i rodzynka*.

Przykład 15. Na poobiedni deser mama postanowiła upiec 6 babeczek z bakaliami. Po uformowaniu z sześciu równych kawałków ciasta sześciu babeczek okazało się, że do ciasta nie trafiło 6 rodzynków. Co zrobić, aby one znalazły się w cieście i by o tym, do której babki trafi każdy z nich decydował przypadek? Odpowiedź wynika z poprzednich dysput. Wystarczy ponumerować babki liczbami od 1 do 6 i dla każdego z sześciu rodzynków wylosować babkę, do której ten rodzynek wciśniemy. Do losowania babki wykorzystamy kostkę. Rodzynków jest 6, a więc rzut kostką trzeba powtórzyć 6 razy. Ale tę procedurę można zracjonalizować. Aby rozmieścić losowo 6 rodzynków w 6 (ponumerowanych) babkach, wystarczy rzucić sześcioma kostkami i tyle rodzynków wcisnąć do babki numer j, na ilu kostkach wypadło j oczek ($j = 1, 2, 3, 4, 5, 6$).

Tabela na rysunku 15. jest protokołem z trzech powtórzeń takiego losowego rozmieszczania 6 rodzynków w 6 babkach.

1	2	3	4	5	6	*numer babki*
	•	••		••	•	*1. rozmieszczenie*
•	•••		•		•	*2. rozmieszczenie*
•	•	•	•	•	•	*3. rozmieszczenie*

Rys. 15. Trzy wyniki rzutu 6 kostkami jako 3 rozmieszczenia 6 rodzynków w 6 babkach

Skupmy uwagę na dwóch szczególnych zdarzeniach związanych z rozmieszczaniem 6 rodzynków w 6 babkach:
$C = \{$*w każdej babce będzie rodzynek*$\}$;
$D = \{$*co najmniej jedna babka będzie bez rodzynków*$\}$.

Rozważania będą dotyczyć tych zdarzeń i jakościowej oceny ich prawdopodobieństwa. Uczniowie odkrywają, że:

- jeśli na żadnej kostce nie wypadnie 5 oczek, to babka numer 5 będzie bez rodzynków;
- w każdej babce będzie rodzynek, jeśli w rzucie sześcioma kostkami wypadną wszystkie liczby oczek.

To nie są łatwe wnioskowania, ale są one ważne, gdy mówimy o kształceniu stochastycznym.

Rozważmy rysunek 15. W 1. rzucie sześcioma kostkami na żadnej kostce nie wypadło ani 1 oczko, ani 4. W babce 1. i w babce 4. nie ma więc rodzynków. Ciekawe jest 3. rozmieszczenie. W rzucie sześcioma kostkami wypadły wszystkie liczby oczek, czyli w każdej babce jest rodzynek. Powtarzając losowe rozmieszczanie 6 rodzynków w 6 babkach skonstatujemy, że zdarza się to wyjątkowo rzadko.

Jeśli losowe rozmieszczenie 6 rodzynków w 6 babkach symulujemy za pomocą rzutu sześcioma kostkami, to

- zdarzenie C zachodzi tylekroć, ilekroć w rzucie sześcioma kostkami wypadną wszystkie liczby oczek;
- zdarzenie D zachodzi tylekroć, ilekroć co najmniej na dwóch kostkach wypadnie ta sama liczba oczek.

Mamy zatem ciekawe wnioski *a posteriori*:

- *jest bardzo mało prawdopodobne (jest prawie niemożliwe), aby w losowym rozmieszczaniu 6 rodzynków w 6 jednakowych babkach do każdej babki trafił rodzynek*;

- *jest bardzo prawdopodobne (jest prawie pewne), że w takim losowym rozmieszczaniu rodzynków co najmniej jedna babka będzie bez rodzynków.*

Zdarzenie C jest prawie niemożliwe. Zdarzenie D jest prawie pewne. Można być praktycznie pewnym, że wypiekając 6 babek z ciasta z 6 rodzynkami, przynajmniej jedna babka będzie bez rodzynka.

Wnioski są oparte na tym, co (i jak często) zdarzało się w przeszłości, a dotyczą bliższej lub dalszej przyszłości. Podkreślamy tu rolę czasu we wnioskowaniach stochastycznych.

W przykładzie 14. z ciastem i rodzynkami do oceny prawdopodobieństwa wykorzystaliśmy pewne miary (masa ciasta). Mówimy tu zatem o *miarowym aspekcie prawdopodobieństwa.*

Przykład 16. [CZY SĄ PODSTAWY, ABY CZUĆ SIĘ OSZUKANYM?] Rozważmy inną sytuację problemową z ciastem i rodzynkami. W piekarni wisi ogłoszenie: *Dziś polecamy rogale, które wypiekliśmy z drożdżowego ciasta z rodzynkami – rogali wypiekliśmy s, a rodzynków do ciasta daliśmy k.* Pan Kowalski (skuszony tą ofertą) kupił rogal i okazało się, że nie ma w nim rodzynka. Poczuł się więc zawiedziony. Czy są podstawy, aby czuć się w takiej sytuacji oszukanym?

W pracy (Płocki, 2007: 457–462) rozważa się tę sytuację w przypadku $k = 200$ i $s = 100$. Symulując losowe rozmieszczanie 200 kul w 100 szufladach, skonstatujemy ciekawą prawidłowość. Praktycznie w każdym wyniku takiego rozmieszczania na 100 szuflad jest około 13 szuflad bez kuli. To są rogale bez rodzynka. Szanse na to, że (kupując rogal) trafimy na rogal bez rodzynka, są spore. Oceną tych szans jest iloraz 13 : 100. Nie jest dziwne więc, że Kowalski na taki rogal trafił. Ten fakt nie daje podstaw, by czuć się oszukanym.

Zadanie 26.

> Rozważmy analogiczną sytuację w przypadku $k = s = 6$. Piekarnia oferuje 6 rogali z ciasta, w które wsypano 6 rodzynków. Kupiłeś jeden rogal i okazało się, że nie ma w nim rodzynków. Czy możesz czuć się oszukany?

Jest prawie pewne, że w oferowanym zbiorze 6 rogali jest przynajmniej jeden bez rodzynka, a zatem są duże szanse (co najmniej równe $\frac{1}{6}$) na to, że kupując jeden rogal, trafisz na taki bez rodzynków. Trafienie na rogal bez rodzynka jest więc stosunkowo prawdopodobne i nie daje powodów do tego, by poczuć się oszukanym.

Połączmy rzut sześcioma kostkami z grą losową i podejmowaniem decyzji.

Zadanie 27.

> Bartek, wręczając Artkowi 3 z 6 trzymanych kostek, zaprosił go do gry. *Na znak każdy z nas rzuci swoimi trzema kostkami* – oznajmił Bartek i dodał: – *jeśli na każdej z sześciu rzuconych kostek wypadnie inna liczba oczek, to ty, Artku, zwyciężysz, jeśli któraś z sześciu liczb oczek nie wypadnie na żadnej z sześciu rzuconych kostek, to ja zwyciężam.* Czy Artek powinien przyjąć to zaproszenie? Dlaczego?

Zwycięstwo Artka jest prawie niemożliwe. W takiej grze prawie na pewno zwycięży Bartek. To jest bardzo niesprawiedliwa gra.

4.3. Czterokrotny rzut kostką, testowy sprawdzian wiedzy i faza matematyzacji

Przykład 17. [CZTEROKROTNY RZUT KOSTKĄ] Czterokrotny rzut kostką jest doświadczeniem losowym. Jego wynik jest czterowyrazowym ciągiem o wyrazach ze zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, wyraz j-ty tego ciągu jest liczbą oczek wyrzuconych w j-tym rzucie. Jeśli w j-tym rzucie wypadnie j oczek, to mówimy o *skojarzeniu w j-tym rzucie* ($j = 1, 2, 3, 4$).

Wynikami czterokrotnego rzutu kostką są ciągi: 6434, 6666, 1234. W wyniku 6434 są dwa skojarzenia. Wszystkich wyników jest 6^4, czyli 1296 i każdy jest jednakowo prawdopodobny.

Z czterokrotnym rzutem kostką zwiążmy zdarzenia:
$A = \{$*w każdym rzucie nastąpi skojarzenie*$\}$,
$B = \{$*w każdym rzucie wypadnie ta sama liczba oczek*$\}$.

Zdarzeniu A sprzyja tylko wynik 1234, a zatem $P(A) = \frac{1}{1296} \approx 0.00077$. Zdarzenie A jest zatem prawie niemożliwe.

Zdarzeniu B sprzyjają wyniki: $1111, 2222, 3333, 4444, 5555, 6666$, a zatem $P(B) = \frac{6}{1296} \approx 0,004629 < 0,05$. Zdarzenie B jest 6 razy bardziej prawdopodobne niż zdarzenie A, ale także jest prawie niemożliwe.

Przed czterokrotnym rzutem kostką *można być praktycznie pewnym, że nie zajdzie zdarzenie A i że nie zajdzie zdarzenie B*. Postawmy pytanie: Komu i na co mogą być potrzebne te dysputy o czterokrotnym rzucie kostką?

Przykład 18. [WIARYGODNOŚĆ POZYTYWNEJ OCENY Z TESTU] Testowy sprawdzian wiedzy z przyrody obejmuje (zaledwie) 4 pytania, do każdego dołączonych jest 6 odpowiedzi, z których jedna i tylko jedna jest prawidłowa. Uczeń ma do każdego pytania podkreślić odpowiedź (jego zdaniem) prawidłową. Za wskazanie prawidłowej odpowiedzi do każdego pytania uczeń dostaje ocenę pozytywną. Czy taka ocena jest wiarygodna? Nie jest niemożliwe, że uczeń, który nic nie umie z materiału objętego testem, trafi w drodze zgadywania na właściwą odpowiedź do każdego pytania, dostanie więc pozytywną ocenę, a ona mu się nie należy. Jakie ten uczeń ma szanse na uzyskanie pozytywnej oceny bez uczenia się?

Postawione wyżej pytania dotyczą pewnego prawdopodobieństwa. Można je obliczyć przy założeniu, że uczeń nic nie umie z materiału objętego testem (hipoteza H_0). To *prawdopodobieństwo* jest dla ucznia oceną *szans*, że nie ucząc się, dostanie pozytywną ocenę. Dla nauczyciela to prawdopodobieństwo jest oceną pewnego *ryzyka*.

Postawmy hipotezę, że uczeń nic nie umie z materiału objętego testem. Nic nie stoi na przeszkodzie, by przyjąć, że właściwa odpowiedź dla j-tego pytania to jest j-ta odpowiedź ($j = 1, 2, 3, 4$). Uczeń o tym nie wie. Ten uczeń zgaduje. Prawdopodobieństwo, że trafnie wskaże odpowiedź do 1. pytania, jest takie, jak prawdopodobieństwo wyrzucenia kostką jedynki. Prawdopodobieństwo trafienia na właściwą odpowiedź do 2. pytania jest takie, jak prawdopodobieństwo wyrzucenia dwójki w drugim rzucie kostką itd. Tak więc prawdopodobieństwo trafienia na właściwą odpowiedź do każdego z czterech pytań (jeśli uczeń nic nie umie) jest równe prawdopodobieństwu zdarzenia A, o którym mowa w przykładzie 18., a więc jest równe $\frac{1}{1296}$, czyli około 0.00077. Jest zatem prawie niemożliwe, aby uczeń, który nic nie umie, dostał ocenę pozytywną.

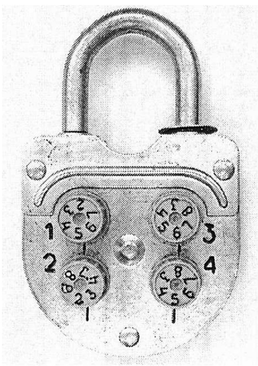
Liczba $\frac{1}{1296}$ jest dla nauczyciela oceną wspomnianego ryzyka. To ryzyko jest zatem znikome, a więc pozytywna ocena jest wiarygodna. Gdyby uczniowi, który nic nie umie, udało się trafić na wszystkie prawidłowe odpowiedzi, to powiedzielibyśmy, że miał szczęście (zdarzyło się wszak coś, co jest prawie niemożliwe i co kojarzy mu się pozytywnie).

Przykład 19. Loteria oferuje wygranie fantu wartego 50 zł za jedyne 2 zł. Uczestnika takiej loterii nazywajmy *graczem*, właściciela loterii nazywa się *bankierem*. Aby ten fant wygrać, gracz płaci bankierowi 2 zł, a następnie rzuca 4 razy kostką. Jeśli w każdym rzucie wypadnie ta sama liczba oczek, to fant staje się własnością gracza. Bankier ma tu na uwadze prosperowanie tego hazardu. Gracz będzie natomiast rozważał swoje szanse na wygranie fantu w jednej próbie (a więc za 2 zł).

Gracz wygra fant w jednej próbie wtedy i tylko wtedy, gdy zajdzie zdarzenie B z przykładu 18. Wygranie fantu w jednej próbie jest zatem prawie niemożliwe. Bankier może liczyć na zyski z tego hazardu.

4.4. Czterokrotny rzut kostką a szyfrowe kłódki i ryzyko

Do ochrony mienia przed kradzieżą stosuje się coraz częściej szyfrowe zamki, kłódki i blokady. Właściciel dobytku chronionego szyfrowym zamkiem mówi o pewnym *ryzyku*, złodziej zaś o pewnych *szansach*. Dla obu jest to pewne *prawdopodobieństwo*. Matematyka dostarcza narzędzi do oceny takiego ryzyka i takich szans.



Rys. 16. Zamykana na szyfr kłódka z czterema gałkami

Przykład 20. Na rysunku 16. mamy szyfrową kłódkę. Aby ją otworzyć trzeba każdą z czterech gałek ustawić na odpowiednim sektorze wzdłuż pionowej kreski pod gałką. Gałki są ponumerowane i każda jest podzielona na 6 równych sektorów. Na rysunku 16. ustawienie gałek na tej kłódce tworzy ciąg 5265.

Dla opisanej kłódki można ocenić ryzyko, że złodziej zdoła ją otworzyć w jednej próbie. O takim ryzyku mówi właściciel kłódki. Co ma do tej oceny czterokrotny rzut kostką?

Załóżmy, że złodziej przymierza się do otwarcia tej kłódki. Nic nie stoi na przeszkodzie, aby przyjąć, że jej szyfrem jest ciąg 1234. Trafienie na właściwy sektor na pierwszej gałce jest tak samo prawdopodobne, jak wyrzucenie kostką jedynki. Analogicznie jest w przypadku trzech pozostałych gałek. Trafienie na odpowiedni sektor na każdej z czterech gałek jest tak samo prawdopodobne, jak zdarzenie A z przykładu 17. Jest więc prawie niemożliwe, aby złodziej (nieznający szyfru) otworzył tę kłódkę w jednej próbie.

Prawdopodobieństwo zdarzenia A związanego z czterokrotnym rzutem kostką jest znów oceną pewnych szans (takie ma na uwadze złodziej) i pewnego ryzyka (o takim mówi właściciel dobytku chronionego tą kłódką).

5. Sztuczki z kostkami, arytmetyka i uogólnianie jako aktywność matematyczna

Sztuczkę opisaną w przykładzie 5. można skomplikować, czyniąc ją bardziej zaskakującą. Chodzi o uogólnianie i o wnioskowania przez analogie. Same wnioskowania mają charakter arytmetyczny.

Przykład 21. [SZTUCZKA Z DWIEMA KOSTKAMI] Uczeń (poza zasięgiem wzroku nauczyciela) rzuci dwiema kostkami, białą i czerwoną, zapamięta sumę wyrzuconych liczb oczek (suma s_1), a następnie:

- odwróci białą kostkę i do sumy s_1 doda liczbę oczek na górze po odwróceniu białej kostki (jest to suma s_2);
- rzuci białą kostką i do poprzedniej sumy doda liczbę wyrzuconych oczek.

Ostatnia suma s_3 nie jest znana nauczycielowi, ale podchodząc do stołu z dwiema leżącymi kostkami (uczeń nie może ich ruszać), poznaje liczby oczek na górnych ścianach leżących kostek. Znając wyjaśnienie sztuczki z jedną kostką, bez trudu wyjaśnimy tę z dwiema. Liczba s_3 jest sumą liczb oczek na górze białej i czerwonej kostki (te liczby nauczyciel zna) oraz liczby 7.

Rzucać można na początku trzema kostkami, białą, czerwoną i zieloną, a następnie odwracać i ponownie rzucać jedną, dwiema, a nawet wszystkimi trzema kostkami, aby (znając końcowy stan leżących kostek) odgadnąć bez trudu sumę uzyskaną przez ucznia, który wykonywał kolejne procedury.

Zadanie 28.

> [ARYTMETYKA W ODGADYWANIU LICZBY OCZEK WYRZUCONYCH WIELOMA KOSTKAMI] Zaproponuj podobną (do tej z przykładu 21.) sztuczkę
> a) z dwiema kostkami (białą i czerwoną), w której będzie się rzucać, odwracać i ponownie rzucać obie kostki;
> b) z trzema kostkami (białą, czerwoną i zieloną), w której będzie się rzucać trzema kostkami, odwracać i ponownie rzucać dwiema kostkami (czerwoną i zieloną).

Zaprezentowane sztuczki kreują arytmetyczne zadania.

Zadanie 29.

> Masz trzy kostki. Rzucisz dwiema i (nie odwracając kostek) położysz jedną z nich na drugiej. Teraz rzucisz trzecią kostką i położysz ją na dwóch już ustawionych. Oznajmisz mi tylko, ile oczek wypadło na trzeciej kostce, a ja natychmiast bezbłędnie odgadnę liczbę oczek na ścianach, którymi kostki są złączone w słupku, włącznie z dolną ścianą słupka. Jeśli na trzeciej kostce wypadło k oczek, to wspomniana liczba jest równa $(21 - k)$. Dlaczego?

Przykład 22. [ARYTMETYKA A ODGADYWANIE WYNIKU RZUTU KOSTKĄ] Poza zasięgiem mojego wzroku rzuć kostką, a następnie:

- liczbę wyrzuconych oczek (ja jej nie znam) pomnóż przez 5,
- do uzyskanego iloczynu dodaj 3,
- otrzymaną sumę pomnóż przez 2,
- do tak otrzymanej liczby dodaj liczbę oczek na dolnej ścianie leżącej kostki i zdradź mi tę końcową sumę.

Ujawniona końcowa suma jest liczbą dwucyfrową. Jeśli od tej liczby odejmiemy 6, to otrzymamy nową liczbę dwucyfrową. Jej cyfra dziesiątek jest liczbą oczek na górnej ścianie leżącej kostki, cyfra jedności jest liczbą oczek na dolnej ścianie tej kostki.

Gdyby wypadło 6 oczek, to kolejne działania byłyby następujące:

$$6 \cdot 5 = 30,$$
$$30 + 3 = 33,$$
$$33 \cdot 2 = 66,$$
$$66 + 1 = 67,$$
$$67 - 6 = 61.$$

Na górze leżącej kostki jest zatem 6 oczek, na dole zaś jedno.

Uzasadnianie tej sztuczki jest arytmetycznym zadaniem. Jeśli x oznacza liczbę oczek wyrzuconych kostką, to w wyniku kolejnych działań otrzymujemy liczbę $(5 \cdot x + 3) \cdot 2 + (7 - x)$. Zauważmy, że

$$(5 \cdot x + 3) \cdot 2 + (7 - x) = 10 \cdot x + 6 + (7 - x) = [10 \cdot x + (7 - x)] + 6.$$

Różnica ostatniej liczby i liczby 6 jest liczbą $[10 \cdot x + (7 - x)]$. Liczba $(7 - x)$ jest jednocyfrowa. Jest to liczba oczek na dolnej ścianie leżącej kostki. Suma $[10 \cdot x + (7 - x)]$ jest liczbą dwucyfrową, której pierwszą cyfrą jest x (czyli wynik rzutu kostką), drugą zaś $(7 - x)$, a więc liczba na dole leżącej kostki.

Zadanie 30.

> [ARYTMETYKA A ODGADYWANIE WYNIKU DWUKROTNEGO RZUTU KOSTKĄ] Rzuć kostką poza zasięgiem mojego wzroku i liczbę wyrzuconych oczek pomnóż przez 2, ten iloczyn powiększ o 5, a uzyskaną liczbę pomnóż przez 5. Teraz rzuć kostką po raz drugi i dodaj liczbę wyrzuconych oczek do uzyskanej poprzednio liczby. Zdradź mi tylko, jaka jest końcowa liczba, a ja bezbłędnie odgadnę wynik dwukrotnego rzutu kostką. Jak to jest możliwe?

Niech x będzie liczbą oczek wyrzuconych w pierwszym, y zaś w drugim rzucie kostką. Liczba, którą uzyskasz na końcu, jest postaci: $(x \cdot 2 + 5) \cdot 5 + y$. Jest ona sumą $(10x + 25 + y)$, którą zapiszmy w postaci $(10x + y) + 25$. Liczba dwucyfrowa $(10x + y)$ jest kodem wyniku dwukrotnego rzutu kostką. Ten wynik jest więc różnicą uzyskanej na końcu liczby i liczby 25.

Inne sztuczki z kostkami zaprezentowano w (Płocki 2011a: 321–324).

6. Symulowanie rzutu kostką – stochastyczne analogie i dekodowanie jako aktywność matematyczna

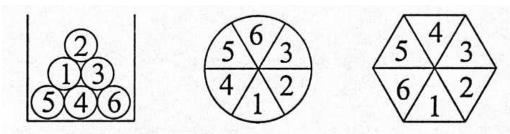
Tematów i motywacji do matematycznych dysput na lekcji może dostarczyć

Zadanie 31.

Zginęła ci kostka do gry, czym i w jaki sposób ją zastąpić?

Zadanie dotyczy symulacji rzutu kostką. Chodzi o określenie doświadczenia losowego δ, które ma sześć jednakowo prawdopodobnych wyników. Aby uzyskać wynik rzutu kostką, wystarczy ponumerować te wyniki liczbami od 1 do 6, następnie wykonać doświadczenie δ. Jeśli zakończy się ono wynikiem numer j, to powiemy, że *wypadło j oczek*. Numeracja, o której tu mowa, określa „słownik” do przekładu wyniku doświadczenia δ na wynik rzutu kostką.

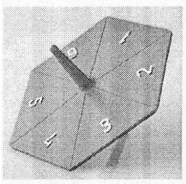
Przykład 23. [KOSTKĘ MOŻNA ZROBIĆ Z SZEŚCIU PONUMEROWANYCH KUL] Weźmy 6 identycznych w dotyku kul, oznaczonych liczbami od 1 do 6. Pudełko lub woreczek z tymi kulami (a nawet dłoń, w której się one mieszczą i swobodnie poruszają w trakcie potrząsania) matematyk nazywa *urną*. Doświadczeniem losowym jest losowanie kuli z tej urny. Liczbę na wylosowanej kuli możemy interpretować jako liczbę oczek wyrzuconych kostką. Dzieci mówią tu, że *z sześciu ponumerowanych kul da się zrobić kostkę*. Matematyk powie, że *urna z sześcioma ponumerowanymi kulami symuluje rzut kostką*.



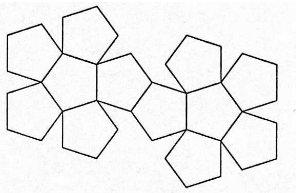
Rys. 17. Urna, ruletka i bączek – przyrządy losujące, które zachowują się jak kostka

Przykład 24. Na rysunku 17 mamy tarczę ruletki. Jest to koło podzielone promieniami na 6 równych i ponumerowanych sektorów. Wokół środka tarczy kręci się szybko strzałka. Numer sektora tarczy, w którym zatrzyma się strzałka, jest wylosowaną liczbą. Tę liczbę możemy interpretować jako liczbę oczek wyrzuconych kostką.

Przykład 25. [WIRUJĄCY BĄCZEK JAKO KOSTKA] Bączek składa się z tarczy w kształcie sześciokąta foremnego i prostopadłej doń osi, która umożliwia wprawianie bączka w ruch wirowy. Odcinki łączące wierzchołki tarczy z jej środkiem dzielą tę tarczę na 6 równych sektorów oznaczonych liczbami od 1 do 6 (zob. rysunek 18.). Numer sektora, na którym oprze się tarcza po zakończeniu wirowania, jest wylosowaną liczbą ze zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, którą możemy interpretować jako liczbę oczek wyrzuconych kostką.



Rys. 18. Bączek sześciokątny jako kostka



Rys. 19. Siatka dwunastościanu foremnego

Zadanie 32.

> [DWUNASTOŚCIAN FOREMNY JAKO KLASYCZNA KOSTKA] Sześcian, z którego powstała klasyczna kostka, jest jedną z pięciu brył platońskich. Taką bryłą jest także dwunastościan foremny. Jak, rozmieszczając oczka w pięciokątach siatki dwunastościanu foremnego (rysunek 19.), uzyskać kostkę sześcienną, która ma własność w_7?

Symulacja probabilistyczna, o której tu mowa, dotyczy stochastycznych izomorfizmów, a zarazem szczególnych równoważności i analogii. Są to ważne zagadnienia związane z metodologią rachunku prawdopodobieństwa (w jej zakres wchodzą specyficzne wnioskowania). Odgrywają one zatem ważną rolę w kształceniu stochastycznym, ale także w kształceniu ogólnomatematycznym.

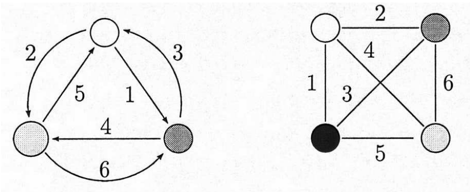
Zwrócimy dalej uwagę na ikoniczne prezentacje i ich rolę w kodowaniu i dekodowaniu informacji z różnych form ich prezentacji.

Zadanie 33.

> [JAK ZROBIĆ KOSTKĘ Z CZTERECH KUL?] Z woreczka, w którym są 4 kule nierozróżnialne w dotyku i każda innego koloru, wylosujmy równocześnie dwie. Na rysunku 20. (prawym)

> każdy wynik takiego losowania prezentuje odcinek łączący dwie wylosowane kule. Obok odcinków wpisano liczby. Ten rysunek jest wizualizacją symulowania rzutu kostką za pomocą czterech kolorowych kul. Opisz ten sposób.

Każdemu odcinkowi na rysunku 20. (jako wynikowi losowania dwóch kul) przypisano liczbę. To przyporządkowanie jest bijekcją ze zbioru wyników losowania dwóch kul na zbiór wyników rzutu kostką. Jest to „słownik" do tłumaczenia wyniku równoczesnego losowania dwóch kul na wynik rzutu kostką.

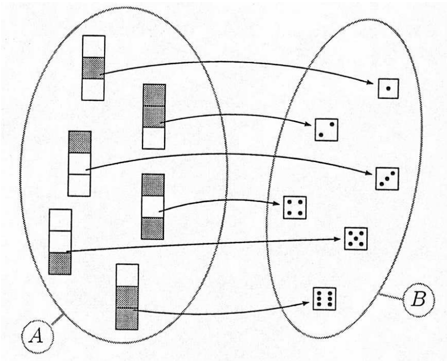


Rys. 20. Jak z czterech lub trzech kul zrobić kostkę do gry

Zadanie 34.

> [JAK ZROBIĆ KOSTKĘ Z TRZECH KUL?] Rozważmy dwukrotne losowanie bez zwracania kuli z urny, w której są trzy kolorowe kule. Każda strzałka na rysunku 20. przedstawia wynik takiego losowania. W jej początku jest kula wylosowana za pierwszym razem, w jej końcu zaś kula wylosowana za drugim razem. Na rysunku 20. każdemu wynikowi przypisano liczbę naturalną. Rozszyfruj ten rysunek, a więc opisz, jak za pomocą trzech kolorowych kul symulować rzut kostką.

Przykład 26. [KOSTKĘ MOŻNA ZROBIĆ Z 2 BIAŁYCH KLOCKÓW I 2 CZERWONYCH] Z woreczka, w którym są 4 jednakowej wielkości sześcienne klocki, 2 białe i 2 czerwone, będziesz losował 3 razy, bez zwracania, jeden klocek i z kolejno wylosowanych klocków postawisz trzykondygnacyjną wieżę. Jest sześć możliwych wyników takiego losowania i wszystkie są jednakowo prawdopodobne. To analogicznie, jak w przypadku rzutu kostką. Rzut kostką możemy więc symulować za pomocą 2 białych i 2 czerwonych klocków.



Rys. 21. Graf strzałkowy funkcji, która przypisuje wieży wynik rzutu kostką

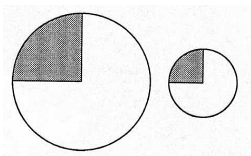
Zadanie 35.

> Na rysunku 21. mamy graf strzałkowy funkcji, która każdej z sześciu możliwych wież biało-czerwonych przypisuje wynik rzutu kostką. Co ma ten rysunek do symulowania rzutu kostką za pomocą 2 białych klocków i 2 czerwonych?

Jeśli w efekcie losowania klocków powstanie wieża, której parter jest biały, a oba piętra czerwone, to powiemy, że *wypadły 2 oczka*.

6.1. Czasami różne przyrządy losujące nie są w istocie różne

Prawdopodobieństwo bywa źle kojarzone z takimi wielkościami, jak liczba kul w urnie, moc zbioru, miara kąta lub długość łuku sektora na tarczy ruletki, a nawet rozmiary kostki czy wirującego bączka.

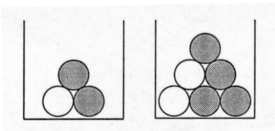


Rys. 22. Tarcze dwóch ruletek: dużej i małej, o białych i czerwonych sektorach

Przykład 27. Na rysunku 22. mamy tarcze dwóch ruletek, dużej i małej. Wokół środka tej tarczy kręci się swobodnie strzałka. Każda z tych ruletek służy do losowania koloru. Jeśli wprawiona w ruch strzałka ruletki zatrzyma się w czerwonym sektorze, to został wylosowany czerwony kolor. Te ruletki wyraźnie się różnią polami czerwonych sektorów. Na pytanie o prawdopodobieństwo wylosowania czerwonego koloru nierzadko uczeń odpowiada prawie bez wahania: *Wylosowanie czerwonego koloru dużą ruletką jest bardziej prawdopodobne niż małą, bo czerwony sektor na tarczy dużej ruletki jest większy niż na małej.*

Środkiem argumentacji jest tu pole (a więc pewna miara). Ale w opisanej sytuacji (dwie ruletki, duża i mała) prawdopodobieństwa wylosowania czerwonego koloru nie zależą od tych pól i są równe.

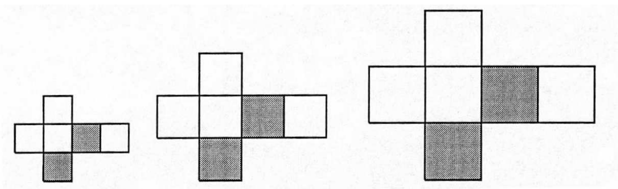
Dwie ruletki z rysunku 22. (duża i mała) różnią się wielkościami tarczy i rozmiarami sektorów czerwonych i białych, ale w losowaniu koloru obie zachowują się identycznie. Prawdopodobieństwo jest tu źle kojarzone z miarą.



Rys. 23. Dwie urny do losowania koloru

Zadanie 36.

> Na rysunku 23. mamy dwie urny. W drugiej urnie jest dwa razy więcej kul czerwonych niż w pierwszej i dwa razy więcej kul białych niż w pierwszej. Bartek twierdzi, że wylosowanie czerwonej kuli z drugiej urny jest dwa razy bardziej prawdopodobne niż wylosowanie czerwonej kuli z pierwszej urny. Czy Bartek ma rację? Dlaczego?



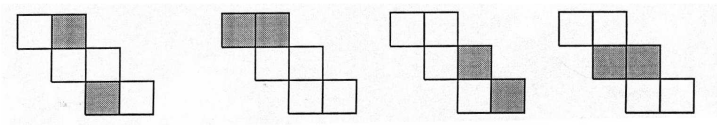
Rys. 24. Siatki trzech kostek do losowania koloru

Zadanie 37.

> Na rysunku 24. mamy siatki trzech kostek z białymi i czerwonymi ścianami. Te kostki wyraźnie się różnią wielkością.

Każda z nich służy do losowania koloru. Wylosowany kolor to kolor górnej ściany leżącej kostki po wykonanym rzucie. Artek twierdzi, że trzecia z tych kostek (czyli ta największa) daje największe szanse na wylosowanie koloru czerwonego, pierwsza zaś (czyli ta najmniejsza) najmniejsze. Czy Artek ma rację? Dlaczego?

W losowaniu koloru nie jest ważne, jak duże są ściany kostki, a jedynie, to ile spośród nich jest białych, a ile czerwonych.

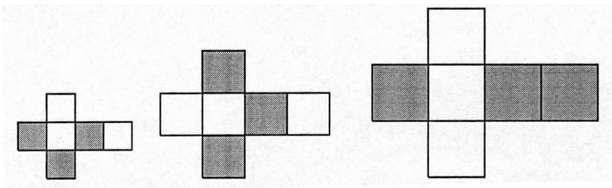


Rys. 25. Cztery siatki kostek do losowania koloru

Zadanie 38.

Co łączy kostki z rysunku 24. z kostkami z rysunku 25.?

Mimo różnicy w położeniu czerwonych ścian na siatce sześcianu (w przypadku kostek z rysunku 25.) i ich wielkości (w przypadku kostek z rysunku 24.), te kostki (jako przyrządy losujące) w istocie niczym się nie różnią. Dlaczego?



Rys. 26. Siatki trzech kostek do (sprawiedliwego) losowania koloru

Zadanie 39.

Na rysunku 26. mamy siatki trzech kostek biało-czerwonych. Każda z tych kostek służy do losowania koloru. Czym się wyróżnia to losowanie od losowania koloru za pomocą kostek z rysunku 24. (por. zadanie 37.)?

Praca jest propozycją wykorzystania kostki do powszechnego kształcenia matematycznego i ogólnego.

Literatura

F e l l e r W.: 1987, *Wstęp do rachunku prawdopodobieństwa*, PWN, Warszawa.

G r u s z c z y k - K o l c z y ń s k a E., D o b o s z K., Z i e l i ń s k a E.: 1996, *Jak nauczyć dzieci sztuki konstruowania gier? Metodyka, scenariusze zajęć oraz wiele ciekawych gier i zabaw*, Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne, Warszawa.

G r u s z c z y k - K o l c z y ń s k a E.: 2016, *O kryzysie edukacji matematycznej dzieci. Rozpaczliwe wołanie o działania naprawcze*, Matematyczna Edukacja Dzieci Nr 1.

K r y g o w s k a Z.: 1986, *Elementy aktywności matematycznej, które powinny odgrywać znaczącą rolę w matematyce dla wszystkich*, Dydaktyka Matematyki 6.

M a j o r M., Na w o l s k a B.: 1999, *Matematyzacja, rachunki i dedukcja w zadaniach stochastycznych*, Wydawnictwo Naukowe WSP, Kraków.

P ł o c k i A.: 2015a *Arithmetic and logic peculiarities and a hexahedral die*, Studia Scientifica Facultatis Paedagogicae Universitatis Catholica Ružomberok, 2, XIV, ISSN 1336–2232, s.184–189.

P ł o c k i A.: 2005, *Dydaktyka stochastyki*, Wydawnictwo Naukowe NOVUM, Płock.

P ł o c k i A.: 2011a, *Prawdopodobieństwo wokół nas*, Wydawnictwo dla Szkoły, Bielsko-Biała (wydanie IV).

P ł o c k i A., N a w o l s k a B.: 2016, *Logika dla Pedagogów*, Wydawnictwo Naukowe NOVUM, Płock.

P ł o c k i A., T l u s t ý P.: 2017, *Kombinatoryka wokół nas*, Wydawnictwo Naukowe NOVUM, Płock.

P ł o c k i A., T l u s t'y P.: 2007, *Pravděpodobnost a statistika pro začátečniky a mirně pokročile*, Prometheus, Praha.

Płocki A.: 2015, *Matematyka ogólna i metody probabilistyczne*, Wydawnictwo Naukowe PWSZ, Nowy Sącz.

Płocki A.: 2016a, *Matematické zvláštnosti šestistěnné hrací kostky*, Elementary Mathematics Education, Olomouc, ISBN 978-80-905281-3-0, s. 178–184.

Płocki A.: 2016b, *Po co nam kostka i matematyczne dysputy o jej rzucaniu*, *Aktualne problemy dydaktyki przedmiotów przyrodniczych*, pod red. P. Bernarda i I. Maciejowskiej, UJ, Kraków 2016, ISBN 978-83-943754-8-5, s. 149–158.

Płocki A.: 2011b, *The cubic dice in the elementary mathematical education*, MATHEMATICS XVI, Scientific Issues, Jan Długosz University in Częstochowa, s.285–296.

Płocki A.: 2007, *Stochastické kocky a stochastické urny v matematike „pre každého"*, Vyučování matematice z pohledu kompetencí žáka a učitele 1. stupně základního, vzdělávání – Srní; Západočeská Univerzita w Plzni, s. 120–128.

Treliński G.: 2016, *Matematyzowanie jako składowa kompetencji matematycznej*, Matematyczna Edukacja Dzieci nr 1.

Steinhaus H.: 1961, *Orzeł czy reszka*, PWN, Warszawa.

Wilk-Siwek H., Swoboda E.: 1997, *Matematyka 3 klasa* (*zeszyt*), Wydawnictwo Kleks, Bielsko-Biała.

Cubic dice in the mathematics education for children

Summary

The main concern of the paper is the cubic dice for games, as a drawing tool, creating (due to the particular pattern of holes on its sides) problems in combinatorics and probability, arithmetics and theory of functions, logic and set theory, algebra and geometry (euclidian or analytic), theory of sequences and statistics.

In this paper dice is a device in games illustrating the processes of decision making, is an instrument of mathematization in the process of application of mathematics, and illustrates the drawing of conclusions by analogies and symmetries (thus presenting mathematics without calculations).