Indywidualne strategie rozwiązania jednego zadania

Ewa Swoboda

Państwowa Wyższa Szkoła Techniczno-Ekonomiczna w Jarosławiu
ewa.swoboda@pwste.edu.pl

Streszczenie

Umiejętność budowania indywidualnych strategii podczas rozwiązywania zadań jest poszukiwaną cechą, co podkreślają dydaktycy matematyki, i co jest potwierdzane poprzez zapisy w dokumentach regulujących pracę na lekcjach. Niestety, często ten postulat nie spotyka się z uznaniem nauczycieli. Na ogół uważają oni, że praca nad zadaniem może skończyć się z chwilą jego rozwiązania, i że nie ma potrzeby prezentowania wielu różnych rozwiązań. Okazuje się, że taka analiza różnych rozwiązań, proponowanych przez uczniów, może być bardzo cennym elementem lekcji – cenniejszym niż rozwiązanie kolejnego zadania, gdyż omówienie tych strategii może wzmacniać sieć kognitywnych połączeń między wieloma elementami wiedzy.

W pracy przedstawiam strategie, które 8-letni uczniowie zastosowali podczas rozwiązywania zadania arytmetycznego. Analiza tych rozwiązań pozwoliła również zauważyć występowanie pewnych nieoczekiwanych, subiektywnych przeszkód, co dodatkowo można traktować jako cenną obserwację metodyczną, poszerzającą wiedzę nauczyciela.

Wstęp

Współczesne koncepcje nauczania matematyki podkreślają, że nauczyciel nie może być „przekaźnikiem wiedzy", a już tym bardziej instruktorem dostarczającym szczegółowych wskazówek postępowania, na przykład przy rozwiązywaniu zadań (Dąbrowski, 2006; Hejný, Zemanova, 2013; Kalinowska, 2010; Novotná, Sarazzy, 2005; Tichá, Hošpesová, 2013; Rożek, 2016). Nauczanie matematyki ma przebiegać w taki sposób, aby uczeń mógł myśleć samodzielnie, aby sam dobierał strategie postępowania, zgodnie ze swoją aktualną wiedzą i doświadczeniem. Takie postępowanie ma głęboki sens. Uczeń, budując wiedzę poprzez łączenie wcześniejszych doświadczeń z nowymi, stara się wykorzystać wcześniejsze strategie w nowych sytuacjach – jednym słowem – samodzielnie buduje swoją sieć kognitywnych powiązań związanych z pojęciami i procedurami matematycznymi. Dodatkowo taki styl zajęć powoduje, że uczeń podczas pracy nie jest blokowany przez narzucane mu odgórnie schematy, których często nie rozumie (Rożek, 2016). Pracując samodzielnie, sam dobiera sposób kodowania informacji, sam analizuje związki w zadaniu i wybiera te, które są dla niego najbardziej czytelne. Cała jego aktywność jest ukierunkowana na znalezienie rozwiązania, nie martwi się, czy obrana przez niego metoda będzie zaakceptowana przez nauczyciela. Samodzielność w rozwiązywaniu zadań (również w klasie) wspiera budowanie schematów (Hejný, 2012) – wykorzystanie wcześniejszej wiedzy w nowej sytuacji powoduje wzmocnienie rozumienia tych związków, zaś dyskutowanie różnych rozwiązań pochodzących od innych uczniów powoduje, że aktualna wiedza każdego uczestnika lekcji pogłębia się, wzbogaca o nowe powiązania.

1. Styl „nauczający" i styl „kognitywny" w nauczaniu matematyki

Przez lata wśród nauczycieli nauczania wczesnoszkolnego panowało przekonanie, że matematyka jest za trudna, by pozwolić się nią dzieciom bawić samodzielnie. Oczywiście nie chodzi tutaj o zabawę w dosłownym znaczeniu, ale o jakąkolwiek samodzielność w doborze sposobu rozumienia pojęć czy strategii rozwiązywania zadań. To nauczyciel miał być jedynym przewodnikiem, niemalże wyrocznią w odniesieniu do etapów pracy nad zadaniem. Takie podejście utrzymywało się do czasów współczesnych. Na szczęście to przekonanie powoli się zmienia, przynajmniej oficjalnie, nie mówiąc już o wielokrotnie powtarzanych postulatach w opracowaniach metodycznych (Gruszczyk-Kolczyńska, 2014). Coraz częściej w dokumentach regulujących pracę nauczyciela mówi się o potrzebie preferowania samodzielności w myśleniu na zajęciach z edukacji matematycznej[1]. Dlaczego to jest ważne? Bo dziecko na zajęciach edukacji matematycznej ma się uczyć działać tak jak matematyk. Czyli – nie tyle zdobywać w odtwórczy sposób uporządkowaną wiedzę i to w wąskim obszarze określonym przez mądrzejszych od niego, ale ma się uczyć samodzielnego dostrzegania matematyki w otaczającym go świecie, samodzielnego argumentowania, wyciągania wniosków i paru innych rzeczy

[1] Oto cytat z podstawy programowej dotyczący umiejętności czytania tekstów matematycznych: *(uczeń) … dostrzega problem matematyczny, tworzy własną strategię jego rozwiązania...*

bez których nie jest możliwe samodzielne poruszanie się w świecie matematyki. Dodatkowo – uczymy matematyki nie tylko po to, żeby dzieci ją znały, ale także, aby dzięki niej się rozwijały – bez argumentowania, wyciągania wniosków nie da się krytycznie i samodzielnie poruszać nie tylko w świecie matematyki, ale także we współczesnej rzeczywistości w ogóle. Takie podejście ma też głębokie moralne implikacje: przygotowujemy ucznia do bycia świadomym członkiem społeczności, odpornym na manipulacje, umiejącym zbudować i uzasadnić własny osąd o otaczających go zjawiskach. Bardzo wyraźnie podkreśla to Milan Hejný (2012), formułując swoich „12 zasad”, które mają regulować sposób pracy na zajęciach z dziećmi.

Przytoczę niektóre z nich.

- Dzieci wiedzą więcej, niż ich uczymy.
- Elementarny schemat matematyczny jest podstawą bardziej ogólnego zrozumienia, pochodzi z kilku konkretnych doświadczeń; często towarzyszy mu efekt „Aha”.
- Nauka pojęć powinna odbywać się poprzez wielokrotne powracanie do tej samej sytuacji zadaniowej.
- Nie izolujemy matematycznych regularności.
- Nie przedstawiamy pojedynczych informacji uczniom: zawsze funkcjonują one w znanym schemacie – schemat dzieci mogą przywołać w dowolnym momencie. Nie przeciwstawiamy sobie zjawisk i pojęć matematycznych, ale adaptujemy różne strategie dla rozwiązywania problemów. Dzieci mogą same decydować, które podejście im najbardziej odpowiada, w czym czują się najbardziej naturalnie.
- Prawdziwa motywacja jest wewnętrzna, niewymuszona przez żaden czynnik zewnętrzny. Dzieci znajdują rozwiązanie problemów dzięki własnemu wysiłkowi.
- Dziecko poszerza swoje osobiste doświadczenia od narodzin: w domu, z rodzicami, podczas zwiedzania okolic lub z rówieśnikami w piaskownicy. Budujemy na naturalnym, konkretnym doświadczeniu, które dziecko może wykorzystać do wyciągania ogólnych wniosków[2].

[2] https://www.h-mat.cz/en/hejny-method (odczyt z dnia 15.01.2019)

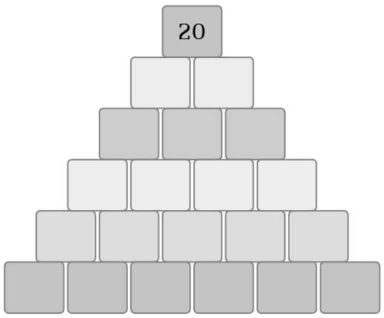
Wydaje się naturalne, że prowadząc zajęcia, należy być otwartym na to, że mogą one przebiegać w sposób nieco różniący się od nauczycielskiego planu, ale będą podążać za dziecięcymi rozwiązaniami. Proponując szeroką tematykę, tworzymy szansę na to, że trafimy w jakiś obszar specyficznych dziecięcych zainteresowań. W ten sposób zostanie stworzona baza konieczna do wprowadzania w proces matematyzacji, wsparty naturalną motywacją.

Wielu nauczycieli z pewnością stwierdzi, że takie opinie można wygłaszać, ale rzeczywistość i tak je zweryfikuje i pokaże, że trzeba jednak uczniów prowadzić za rączkę. I że w codziennej pracy wcale nie ma tylu możliwości, by pozwolić dzieciom być kreatywnymi. Zwykle wtedy myślę: mój Boże, ileż to razy dziecko potrafiło mnie głęboko zawstydzić, pokazać, że moje rozumowanie jest sztampowe i naiwne.

Aby nie być gołosłowną, w tym opracowaniu pokażę, jak wiele niespodziewanie różnych podejść zaprezentowali uczniowie, samodzielnie rozwiązując jedno, być może nietypowe, zadanie.

2. Przebieg pracy nad zadaniem

Zadanie było następujące: W każdym rzędzie suma liczb na klockach wynosi 20. Należy uzupełnić pola na każdym poziomie[3].



Rys. 1. Zadanie rozwiązywane przez uczniów

[3]Zadanie pochodzi ze zbioru Lankiewicz, Sawicka, Swoboda (2008, 26). W oryginale jego brzmienie jest następujące: *Zagraj z koleżanką lub kolegą w grę „Przechodzę na wyższy poziom". W każdym rzędzie suma liczb na klockach wynosi 20. Z koleżanką lub kolegą wpisujecie swoje propozycje: jedna osoba wpisuje, a druga sprawdza. Jeżeli wynik się zgadza, drugi rząd uzupełnia koleżanka lub kolega.* Dla potrzeb obserwacji treść polecenia została zmieniona; uczniowie pracowali samodzielnie.

Matematyczny sens tego zadania jest prosty i oczywisty; polega na rozkładzie liczby 20 na składniki – na dwa, trzy, cztery, pięć, sześć. Zadanie mieściło się w kompetencjach dzieci uczęszczających do klasy I, a już z pewnością do klasy II. Można je też było potraktować jako proste zadanie rachunkowe.

Zadania posiada wiele rozwiązań, jako że liczbę 20 można rozłożyć na składniki naturalne na wiele różnych sposobów. Było ono rozwiązywane w styczniu 2018 roku, w grupie 59 dzieci. Byli to uczniowie dwóch różnych klas drugich, w różnych polskich szkołach. Uczniowie pracowali podczas dodatkowych zajęć odbywających się poza zwykłym rozkładem lekcji. Nauczyciel zaprezentował zadanie i omówił jego treść, aby się upewnić, że wszyscy uczniowie ją zrozumieli. Następnie zadanie było rozwiązywane indywidualnie przez uczniów. Prezentowali oni potem swoje rozwiązania w klasie.

Nie wszystkie rozwiązania były bezbłędne. Ale to się przecież zdarza w każdej klasie. Jednak podczas prezentowania rozwiązań okazało się, że uczniowie spontanicznie zastosowali niespodziewanie dużo strategii. Opis tych strategii jest głównym celem tego referatu.

3. Strategie stosowane przez uczniów

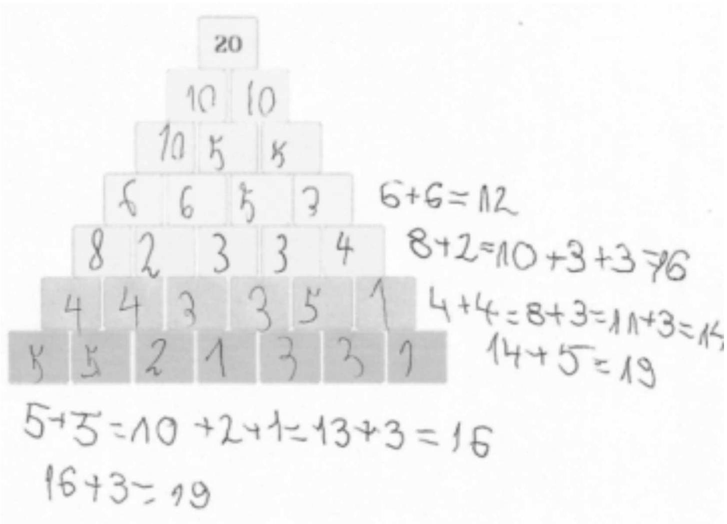
To, co okazało się wspólne dla wszystkich, to sposób rozwiązywania zadania „od góry". To znaczy: dzieci zaczynały od poziomu składającego się z dwóch okienek, potem przechodziły niżej na poziom trzech okienek, potem czterech itd. Już na tym etapie ja, autorka zadania, byłam zaskoczona. Sugerowana wizualnym kształtem zadania założyłam, że najpierw będzie rozwiązywany najniższy poziom, a potem dziecko będzie pięło się pod górkę. Tak się przecież buduje piramidy! Okazuje się, że dzieci przyjęły zupełnie inną zasadę, w oczywisty sposób matematycznie sensowniejszą: dodawanie dwóch składników jest łatwiejsze niż dodawanie wielu składników.

Nie było to jedyne zaskoczenie. Najbardziej prosty podział sposobów rozwiązywania zadania prowadzi do wyróżnienia dwóch strategii:

- traktowanie każdego poziomu oddzielnie;
- traktowanie poziomu wyższego jako punktu wyjścia do badania poziomu niższego (rozkład kaskadowy).

3.1. Strategia: każdy poziom oddzielnie

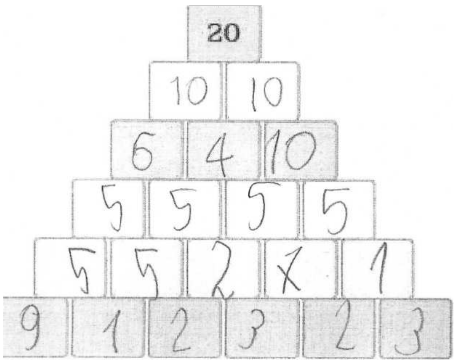
Ta strategia pojawiała się dość sporadycznie. Uczniowie wiedzieli, że suma składników na każdym poziomie powinna wynosić 20. W ich pracy nie można było jednak zauważyć związków między wcześniejszymi rozwiązaniami (na wyższym poziomie). Bywało tak, że metodą prób i błędów starali się dopasować wpisywane wartości, by w sumie osiągnąć wartość dwadzieścia. Pokazują to rozwiązania na rysunkach 2, 3, 4.



Rys. 2. Przykład rozwiązania typu „każdy poziom oddzielnie"

W pierwszej pracy (rys. 2) uczennica najpierw rozbiła liczbę 20 na dwie dziesiątki. Na kolejnym poziomie jedną z dziesiątek zastąpiła dwiema piątkami. Ale potem zupełnie zmieniła sposób pracy. Wstawiała dwie liczby jednocyfrowe, a potem mozolnie dodawała kolejne składniki, zapisując obok wyniki cząstkowe. Wybór kolejnych składników jest raczej przypadkowy, chociaż można zaryzykować stwierdzenie, że rozpoczynała pracę od większego składnika, a potem starała się operować mniejszymi liczbami. Nie korzystała przy tym z dopełniania do 10, nie omijała problemu tzw. „progu dziesiątkowego", który chyba w jej matematycznym doświadczeniu nie odgrywał istotnej roli. Warto zauważyć, że autorka tego rozwiązania była bardziej skupiona na samym poszukiwaniu kolejnych rozwiązań niż na zachowaniu formalnej poprawności zapisu.

Ale byli i tacy, którzy oparli swoją pracę na świadomości, że dwadzieścia stanowi sumę dwóch dziesiątek. W zależności więc od ilości składników, grupowali liczby tak, aby kolejne 2 i 3 okienka dawały 10. Mogło to być 5 + 5 albo 6 + 4. Tyle że proponowany rozkład 10 na każdym poziomie był robiony niezależnie.



Rys. 3. Wykorzystanie rozkładu liczby 10 na dwa składniki

W prezentowanym przykładzie (rys. 3) mamy:

6 + 4, 5 + 5, 2 + 7 + 1, 9 + 1, 2 + 3 + 2 + 3.

Te rozkłady są jednak też niezależne od siebie. Na przykład przedostatni poziom to rozkład

5 + 5 oraz 2 + 7 + 1,

a pod nim znajduje się zupełnie inny rozkład:

9 + 1 oraz 2 + 3 + 2 + 3.

Wynika z tego, że 5 + 5 zostało zastąpione przez 9 + 1,

a rozkład 2 + 7 + 1 przez 2 + 3 + 2 + 3.

Jednak w większości uczniowie starali się podchodzić do zadania tak, aby w jakimś stopniu wykorzystać to, co udało im się przeliczyć na poziomie wcześniejszym. Te „stopnie" wykorzystania wyników z poziomu wcześniejszego były bardzo różne. Omawiam tę sytuację w następnym podpunkcie.

3.2. Rozkład kaskadowy

Tak nazywam strategię, w której uczeń w świadomy sposób nawiązywał do wyniku osiągniętego wcześniej. Tutaj dało się zauważyć cały szereg interesujących pomysłów.

A. Wydzielenie stałej, powtarzającej się wartości. Na przykład na pierwszym poziomie uczeń rozbił 20 na dwie dziesiątki. Na niższych poziomach przepisywał 10 i zajmował się tylko rozbijaniem drugiej dziesiątki. W ten sposób zadanie stało się zdecydowanie łatwiejsze, gdyż uczeń musiał kontrolować swoje działanie w zakresie dużo mniejszych liczb (rys. 4).

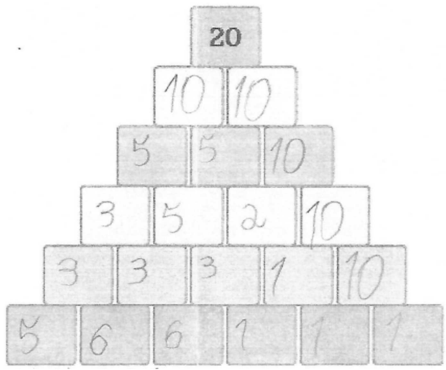
B. Wykorzystanie rozkładu 10 na dwie piątki. Inną ciekawą strategią w tej grupie było operowanie jedynie dziesiątkami i piątkami. W takiej sytuacji uczeń nie wychodził poza trzy składniki: 10, 5, 0 (rys. 5). Tam, gdzie nie wystarczało rozbicie wartości na piątki, uczeń w okienka wpisywał 0.

C. Wykorzystanie składnika 0. Po pierwszym rozkładzie 20 na dwa składniki uczeń nowe okienka każdego kolejnego poziomu uzupełniał zerami.

D. Wykorzystanie składnika 1. Taka strategia często była wsparta dodatkowym wykorzystaniem powtarzającej się dziesiątki. Powiększanie ilości składników polegało na rozbiciu liczby n na dwa składniki: 1 oraz $(n - 1)$. W takim układzie piramida stawała się w pewnym sensie symetryczna – jedna krawędź była budowana z dziesiątek, a druga z powtarzających się jedynek.

Poniżej podaję przekłady takich rozwiązań wraz z krótkimi komentarzami.

- Przykład strategii A



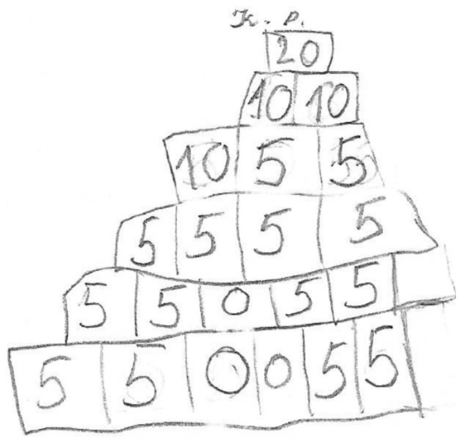
Rys. 4. Wykorzystanie powtarzającej się wartości 10

W przykładzie 4 widać, że liczba 10 powtarza się na czterech poziomach, licząc od góry. Jedynie ostatni poziom wyłamuje się z tej zasady. Tutaj uczeń stosuje zupełnie inny sposób, niespodziewany, niezwiązany logicznie z żadnym z poprzednich. Ten układ jest poprawny, gdyż

$5 + 6 + 6 + 1 + 1 + 1$ daje 20,

ale warto się zastanowić, skąd się wziął. Być może liczba 6 ma jakiś związek z wartościami 3 + 3 znajdującymi się nad nią. Gdyby tak było, to byłby wpływ doświadczeń z innych zadań, gdzie zasadą bywało pisanie w okienkach sumy wartości z dwóch okienek powyżej. Jeżeli tak, to uczeń ten wykazał się dodatkowo bardzo dużą dyscypliną myślenia i potrafił zaadaptować do nowej sytuacji doświadczenia z zupełnie innych obszarów.

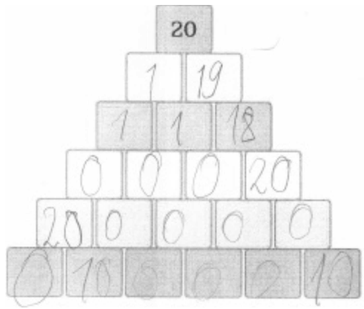
- Przykład strategii B



Rys. 5. Rozkład 20 na dziesiątki, piątki i zera

Tutaj (rys. 5) uczeń specjalnie nie poszukuje różnorodności. Czy to jest powód, by nie docenić takiego rozwiązania? Wprost przeciwnie! Jest ono bardzo eleganckie, symetryczne, uporządkowane. Że uczeń, zdaniem niektórych jego kolegów, poszedł „na skróty"? No to co? Raczej warto podkreślić, że w świadomy sposób wykorzystał zarówno jedną z użytecznych własności dziesiątki, jak i pokazał, że dobrze rozumie system pozycyjny dziesiątkowy.

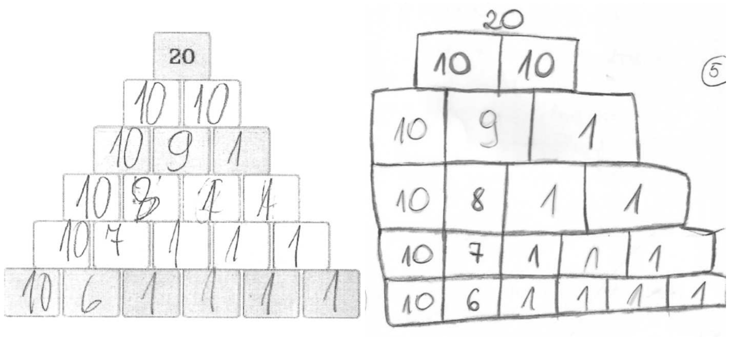
• Przykład strategii C



Rys. 6. Wielokrotne wykorzystanie zera jako składnika

Jeszcze inaczej wygląda sprawa w przypadku takiego rozwiązania. Prawdopodobnie pochodzi ono od ucznia zdolnego, ale zbytnio niezainteresowanego rozwiązywaniem zadania. Dwa pierwsze górne poziomy to generowanie ilości składników poprzez odrywanie wartości 1. Ale już na trzecim poziomie uczeń dostrzegł, że zadanie można rozwiązać jeszcze łatwiej: przez wypełnianie nowych okienek zerami! Już teraz nic nie musi liczyć, wie na pewno, że suma składników wyniesie 20! Jedynie jeszcze na ostatnim poziomie dwudziestkę rozbija na dwie dziesiątki, nie rezygnując z zer w pozostałych okienkach. Być może takie rozwiązanie nie pojawiłoby się na tzw. „prawdziwej" lekcji. A przecież dobrze, że się pojawiło; jest zabawne, sprytne. Matematyka jest dla tych, którzy znają skuteczne metody wykorzystania własności liczb, i to takich, które mogą być pomocne w rozwiązywaniu problemów.

• Przykład strategii D



Rys. 7. Rozkładanie tylko jednej dziesiątki

W obydwu tych przypadkach widać, że pierwsza wartość 10 była jedynie dodatkiem do dalszego zadania. Zaś do rozkładu drugiej dziesiątki wystarczyło kolejne rozdrabnianie wartości jednocyfrowej, zgodne z uporządkowaniem (cofaniem się) na osi o jedną jednostkę.

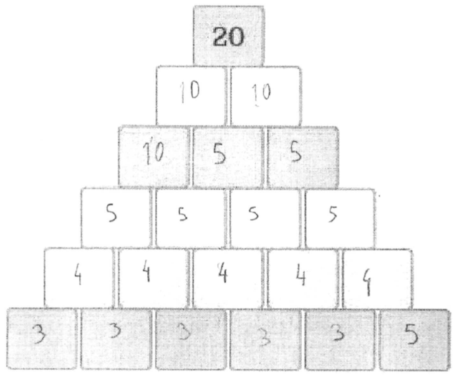
Powyższa analiza nie ma służyć budowaniu teorii o tym, jak rozwiązywać podobne zadania, ani temu, by tworzyć kategoryzację rozwiązań. Nie sądzę, by takie uporządkowanie wyników można było w jakiś sposób uogólnić na inne zadania rachunkowe. Ma znaczenie jedynie dla pokazania, że dzieci są zdolne do stosowania różnorodnych strategii. Pewnie gdyby były zmuszone do pracy zgodnie ze ścisłymi wytycznymi nauczyciela, który starałby się poprowadzić je krok po kroku poprzez różne etapy rozwiązania, zadanie stałoby się nudnym ćwiczeniem, angażującym tylko niektórych uczniów w klasie. Zaprezentowane w taki sposób dało szansę pracy na własnym, indywidualnym poziomie kompetencji.

4. Przeszkody ujawnione podczas rozwiązywania zadania

Analiza rozwiązanych prac ujawniła zupełnie nieoczekiwane przeszkody w jego rozwiązywaniu. I były to przeszkody wcale niezwiązane z prostym wykonywaniem poprawnych rachunków. Były one różnorodne, ale fakt, że powtórzyły się u kilku osób, spowodował, że uznałam, że zasługują na uwagę.

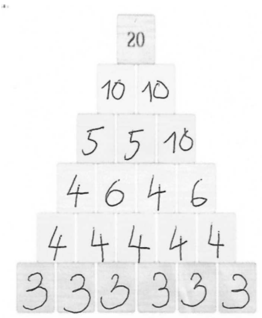
4.1. Próby stosowania rozkładów na jednakowe składniki

Taka postawa pojawiała się dość często, Mogła być spowodowana zauważeniem, że na pewnym poziomie pojawiły się same piątki. Wtedy na niższym poziomie uczeń mógł eksperymentować z czwórkami (ma być więcej składników, więc wartość pojedynczego składnika powinna być mniejsza). Sukces w znalezieniu takiego „eleganckiego” rozkładu mógł prowokować do kontynuowania zauważonej regularności. Kolejną wartością poddaną badaniu było więc 3 (lub 2). Czasami uczeń zadawalał się częściowym rozwiązaniem – pisał trójki tak daleko, jak tylko to było możliwe, a w ostatnie okienko wpisywał wartość będącą dopełnieniem do 20.

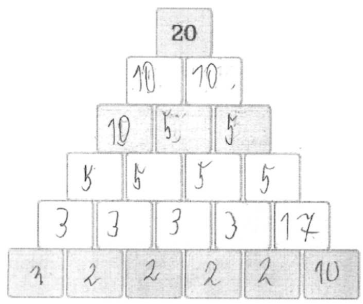


Rys. 8. Próba rozkładu 20 na jednakowe składniki

Nie zawsze uczeń był w stanie myśleć do końca w sposób zdyscyplinowany. Samo odkrycie, że zasada „więcej składników – mniejsze wartości składników" w zestawieniu z regularnością zmiany mogło powodować, że uczeń nie był w stanie zapanować nad najważniejszym warunkiem: suma składników ma wynosić 20. Pokazują to dwa poniższe przykłady.



Rys. 9

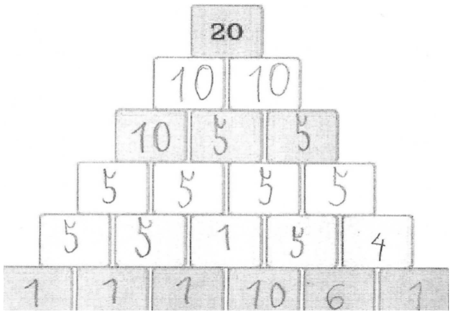


Rys. 10

Na rysunku 9 widać, że najniższy poziom wypełniony jest tylko samymi trójkami. W rysunku 10 najciekawszy jest przedostatni poziom – tutaj można przepuszczać, że pod koniec wypełniania okienek uczeń postanowił sprawdzić, czy suma wynosi 20, ale ten warunek zastosował tylko do dwóch ostatnich okienek. Ciekawe, że na ostatnim poziomie ten problem udało się uczniowi rozwiązać i ostatnie okienko prawidłowo dopełnia całość do 20.

4.2. Problem szóstego poziomu

Dość zaskakujące dla mnie było zauważenie faktu, że między rozkładem wartości 20 na 5 składników, a tym na 6 składników pojawiła się u uczniów bariera. Wielokrotnie można było stwierdzić, że do poziomu 5 składników uczeń radził sobie sprawnie, i wiązał ze sobą kolejne poziomy. Stanąwszy przed koniecznością kontynuowania pracy i wygenerowania rozkładu na 6 składników – zupełnie zmieniał strategię, szukał nowego pomysłu, często metodą prób i błędów. Widać to w poniższym przykładzie (rys. 11).



Rys. 11. Problem szóstego poziomu

W tym przykładzie widać, że uczeń najpierw stosował równe dziesiątki. Potem dziesiątki rozbijał na piątki. Potem jedną piątkę rozbił na jeden i cztery. Ale żadna z tych strategii nie została przez niego zastosowana na ostatnim poziomie. Tutaj najpierw pojawiają się same jedynki, potem (chyba w wyniku szacowania) wskakuje dziesiątka i szóstka, by w końcu całość zamknąć ostatnią jedynką.

Podsumowanie

Rozwiązania, zaprojektowane przez uczniów potwierdziły, że są oni w stanie wygenerować bardzo wiele podejść do zadania. Wystarczyło tylko pozwolić im myśleć po swojemu. Omówienie z uczniami proponowanych rozwiązań okazało się ciekawsze niż samo rozwiązywanie. Dało okazję do wielu porównań, do pokazania różnorodności podejść. Te strategie były na tyle ciekawe, że warto było o nich z uczniami rozmawiać. Nie zawsze uczniowie byli świadomi, że robią rzeczy warte podkreślenia, czasami wręcz traktowali je jako „uchylanie się od rzetelnej pracy".

Być może podczas typowej lekcji by się one nie pojawiły. Jednak, ponieważ zadania były rozwiązywane na zajęciach pozalekcyjnych, uczniowie mieli odwagę pracować „po swojemu". Rozmowy pozwalały uczniom samodzielnie odnieść się do zaprezentowanych rozwiązań, zarówno tych poprawnych, jak i z błędami. Nie było powodu, by mówić o ocenianiu prac, stąd również prace błędne mogły być wykorzystane jako narzędzie do uczenia się.

Zadanie w swojej formie było proste, ale inne niż zwykłe słupki. Wydaje się więc, że warto przy poszukiwaniu zadań zwracać uwagę nie tylko na to, do jakiego odnoszą się obszaru treści z podstawy programowej. Tak jak w tym przykładzie – zaprezentowane zadanie pozwoliło na dużo więcej, niż tylko na przećwiczenie umiejętności wykonywania dodawania w obrębie do dwudziestu.

Literatura

D ą b r o w s k i M.: 2006, *Pozwólmy dzieciom myśleć*, Centralna Komisja Egzaminacyjna, Warszawa.

G r u s z c z y k - K o l c z y ń s k a E. (red.): 2014, *Edukacja matematyczna w klasie I*, CEBP 24.12 Sp. z o o., Kraków.

H e j n ý M.: 2012, *Exploring the Cognitive Dimension of Teaching Mathematics through Scheme-oriented Approach to Education*, Orbis Scholae 6 (2), 41–55.

H e j n ý M., Z e m a n o v á R.: 2013, *Vyučování orientované na budování schemat v praxi*, w: T o m k o v á B., M o k r i š M. (red.), *Matematika v primárnej škole – rôzne cesty, rovnaké ciele*, Prešov, 82–86.

K a l i n o w s k a A.: 2010, *Pozwólmy dzieciom działać – mity i fakty o rozwijaniu myślenia matematycznego*, Centralna Komisja Egzaminacyjna, Warszawa.

L a n k i e w i c z B., S a w i c k a K., S w o b o d a E.: 2012, *"Matematyka PLUS", Ćwiczenia rozwijające zainteresowania matematyczne dzieci (dla klasy II)*, Wydawnictwo Nowa Era, 96.

N o v o t n á J., S a r r a z y B.: 2005, *Model of a professor's didactical action in mathematics education: professor's variability and students' algorithmic flexibility in solving arithmetical problems*, Proceedings of CERME4, SantFeliu de Guíxols, Spain, 17–21 February 2005, 696.

S e m a d e n i Z.: 2015, *Matematyka w edukacji początkowej – podejście konstruktywistyczne*, w: S e m a d e n i Z., G r u s z c z y k - K o l -c z y ń s k a E., T r e l i ń s k i G., B u g a j s k a - J a s z -c z o ł t B., C z a j k o w s k a M., *Matematyczna edukacja wczesnoszkolna. Teoria i praktyka*, Wydawnictwo Pedagogiczne ZNP, Kielce.

R o ż e k B.: 2016, *On formal and informal notation of calculation during the early learning of arithmetic by young students*, Didactica Mathematicae 38, s. 149-174.

T i c h á M., H o š p e s o v á A.: 2013, *Developing teachers' subject didactic competence through problem posing*, Educational Studies in Mathematics 83(1).

https://www.h-mat.cz/en/hejny-method

https://men.gov.pl/wp-content/uploads/2016/11/edukacja-wczesnoszkolna.pdf

Individual strategies for solving the one task

Summary

The ability of building individual strategies when solving tasks is a valuable skill. This fact is emphasized by educators of mathematics, and is confirmed in documents regulating the work in class. Unfortunately, very often this approach recommendation is not appreciated by teachers. In general, they believe that work on a task ends the moment the solution is found, and that there is no need to present any other possible solutions. It turns out that such an analysis of various solutions proposed by students can be a very valuable element of the lesson – more valuable than moving on to a next task. Discussing these strategies with students can strengthen the network of cognitive connections among many elements of knowledge.

In my work, I present strategies that 8-year-old students used when solving an arithmetical task. The analysis of these solutions also allowed noticing the occurrence of some unexpected, subjective obstacles, which can, additionally, be treated as a valuable methodological observation, broadening the teacher's knowledge.