O błędach merytorycznych i metodycznych wprowadzania dzieci w świat geometrii. Geometria bryły – zalety kształtowania intuicji i zarysów pojęć[1]

Edyta Gruszczyk-Kolczyńska
Akademia Pedagogiki Specjalnej w Warszawie, edyta.g.k@gmail.com

Stanisław Domoradzki
Uniwersytet Rzeszowski, domoradz@ur.edu.pl

Streszczenie

Wspomaganie dzieci w tworzeniu intuicji i zarysów pojęć geometrycznych zaczyna się od geometrii płaskiej. Ukazujemy ciemne strony takiej edukacji, które przyczyniają się do niepowodzeń w nauce matematyki. Można tego uniknąć, gdy rozpocznie się edukację dzieci od geometrii brył. W artykule przedstawimy ważniejsze założenia i rozwiązania metodyczne takiego wprowadzania dzieci w świat geometrii.

1. Co wiemy o tworzeniu intuicji i zarysów pojęć geometrycznych w umysłach dzieci

Silna potrzeba poznania otoczenia skłania niemowlęta do wyciągania rąk do zabawek zawieszanych nad ich łóżeczkami. Przyciągają je, dotykają i obejmują dłonią pod kontrolą wzroku. W tym okresie życia w poznawaniu otoczenia dominują doznania ruchowe i dotykowe, z niewielkim udziałem doznań wizualnych. Oznacza to, że dzieci najpierw

[1] W artykule tym korzystamy z fragmentów publikacji: E. Gruszczyk-Kolczyńska, *Jak pomóc dziecku pokonać niepowodzenia w nauce matematyki. Rozpoznawanie przyczyn i działania naprawcze*, książka z serii *„Dziecięca matematyka" dla rodziców, terapeutów i nauczycieli* (w druku, Wydawnictwo CEBP w Krakowie); E. Gruszczyk-Kolczyńska, J. Kozieł 2017, *Zastosowanie Darów Froebla w Dziecięcej matematyce. Treści kształcenia, komentarze metodyczne oraz opisy zajęć wspomagających rozwój umysłowy i edukację matematyczną przedszkolaków*, rozdział 13, oraz referatu E. Gruszczyk-Kolczyńskiej, S. Domoradzkiego, *Nowe odczytanie wartości edukacyjnej bryły* wygłoszonego na XVI Międzynarodowej Konferencji Naukowej EDUKACJA – TECHNIKA – INFORMATYKA, Rzeszów 24–26.09.2018; Zob. również E. Gruszczyk-Kolczyńska, S. Domoradzki 2016, *Kamienie milowe w nauczaniu geometrii dzieci w Polsce od połowy XIX w. do końca XX w.*

poznają trójwymiarowość obiektów, następnie – w miarę doskonalenia percepcji wzrokowej – ustalają inne ich cechy. Ten skomplikowany proces przebiega tak:

- niemowlęta poznają najbliższe otoczenie dotykiem i ruchem swojego ciała. Wyciągają ręce w stronę przedmiotów i manipulują, doświadczając ich kształtu;
- raczkujące niemowlaki poznają i oswajają nieco szersze otoczenie. Przemieszczając się, mogą ustalać miejsce obiektów, zmieniać relację pomiędzy nimi a sobą: był daleko – przybliżam się – jest blisko, jest blisko – oddalam się – jest daleko itd.;
- gdy maluchy stoją na nóżkach, ogarniają wzrokiem to, co znajduje się w szerszej przestrzeni. Wdrapując się na meble, poznają niedostępne dotąd przedmioty. Chodząc, doświadczają nie tylko położenia obiektów w otoczeniu, ale mogą podejść i poznać je, oraz zmienić ich wzajemne relacje, na przykład przysunąć do siebie.

W miarę dalszego rozszerzania się możliwości ruchowych i rozwoju społecznego dzieci uczą się rozpatrywać otoczenie i znajdujące się tam obiekty kolejno z własnego punktu widzenia, z punktu widzenia drugiego człowieka i z uwzględnieniem przyjętego układu odniesienia[2]. W podobnie naturalny sposób dzieci uczą się nazywać słowami swoje spostrzeżenia: najpierw po dziecinnemu, stopniowo coraz precyzyjniej, wzorując się na wypowiedziach dorosłych. Dlatego trafnie określają kształt obiektów, mówiąc np. *okrągła* (o piłce), *trójkątny* (o klocku w kształcie daszka)..., chociaż nie są jeszcze świadome ich geometrycznego znaczenia.

Z analizy rozwoju psychoruchowego wynika, że **dzieci tworzą pierwsze intuicje geometryczne z doświadczeń manipulacyjnych i przestrzennych. Znaczące są dotykowe doświadczenia kształtu brył i rozmawianie o nich oraz ustalanie miejsca trójwymiarowych obiektów w otoczeniu. Potem powoli – korzystając z edukacyjnego wsparcia – przekształcają te intuicje w zarysy pojęć geometrycznych.**

[2]Model poznawania i oswajania otoczenia przez dzieci znajduje się w rozdziale *Orientacja przestrzenna w edukacji dzieci* w publikacji: E. Gruszczyk-Kolczyńska, E. Zielińska, *Dziecięca matematyka – dwadzieścia lat później*, 2015.

W tym złożonym procesie M. Hejný[3] wyróżnia *poziom pojęć personalnych* ujmowania kształtów obiektów. Dzieci pokazują wybrany obiekt i stwierdzają: *To jest trójkąt...*, *To jest kwadrat...*, *To kółko...* W miarę gromadzenia doświadczeń logicznych i rosnącej sprawności klasyfikowania starsze dzieci przechodzą na następny poziom, nazwany przez Hejný'ego *poziomem pojęć socjalnych.* Koncentrują się na cechach wspólnych obiektów geometrycznych i tworzą ich zbiory jako wspólnotę o określonej strukturze. Stwierdzają np. *To są trójkąty*, podkreślając cechy wspólne zbioru obiektów (ich trójkątność[4]), akceptując różnice w wielkości i kształcie. Dzięki temu mogą analizować i porządkować figury geometryczne według obranych cech, np. *To są trójkąty równoboczne, bo mają boki o tym samym wymiarze.*

Złożoność tego procesu pokazuje fragment badań przeprowadzonych przez Hejný'ego. Gdy zapytano Anitę (lat 9), co przedstawia kwadrat narysowany na kartce, powiedziała: *Ten kwadrat może być oknem albo klockiem.* Anita trafnie posługuje się słowem *kwadrat*, chociaż rozpoznaje obrazek kwadratu jako zarys (niedokończony rysunek) czegoś realnego, przestrzennego o kwadratowym kształcie. Dziewczynka musi jeszcze zgromadzić sporo doświadczeń logicznych, aby zaczęła traktować narysowany kwadrat jako wizualizację pojęcia kwadrat i przekształcać je – w edukacji szkolnej – w coraz precyzyjniejsze pojęcie geometryczne.

2. O błędach popełnianych w trakcie wspomagania dzieci w rozwijaniu intuicji i tworzeniu zarysów pojęć w obszarze geometrii płaskiej

Przykładem takich błędów jest sposób wspomagania dzieci w kształtowaniu intuicji geometrycznych w trakcie zajęć oglądanych w przedszkolu. Nauczycielka zgromadziła na stoliku kolorowe plastikowe płytki o różnych kształtach i wielkościach (z mozaiki geometrycznej). Do tablicy przyczepiła spory karton w kolorze czerwonym, w kształcie trójkąta

[3]Wyniki badań nad kształtowaniem się pojęć geometrycznych w umysłach dzieci – wraz z ich interpretacją – omawia M. Hejný w publikacjach: *The understanding of geometrical concepts*,1993; *Development of geometrical concepts,* 1995; *Rozwój wiedzy matematycznej,* 1997.

[4]Intuicyjnie rozumiana jako cecha figury geometrycznej, która ma trzy boki, trzy kąty i trzy wierzchołki.

równobocznego. Pokazała go dzieciom i stwierdziła: *To jest trójkąt. On ma trzy boki* (wskazała każdy) i *trzy kąty* (licząc, pokazała je). Następnie poleciła przyjrzeć się kolorowym płytkom na stoliku i poleciła wyszukać te, które są trójkątami. Kilkoro dzieci pokazało jej czerwone płytki w kształcie równobocznych trójkątów, sugerując się kształtem i kolorem kartonu przypiętego do tablicy. Ponieważ takich płytek było mało, pozostałe dzieci oznajmiły: *Nie ma.* W ciągu czterech minut – bo tyle trwał ten fragment zajęć – nauczycielka popełniła następujące błędy merytoryczne:

- uznała, że czerwony karton o kształcie trójkąta jest pojęciem, na dodatek dobitnie to podkreśliła, stwierdzając *To jest trójkąt...* i pokazując go dzieciom;
- utożsamiła bryły z figurami z geometrii płaskiej, wszak opisywała cechy trójkąta, nie bacząc na to, że karton w tym kształcie ma grubość, jest więc bryłą i bryłami są też płytki o kształcie trójkątów;
- przyjęła, że dzieci kształtują pojęcia tak jak dorośli, podała im więc gotową definicję do zapamiętania i oczekiwała, że będą się nią posługiwać w działaniu.

Jednym z głównych błędów jest to, że wprowadzanie dzieci w świat geometrii zaczyna się od figur płaskich. Przyjęto, że nauczyciele mogą się posługiwać kartonikami lub płytkami o określonym kształcie, traktując je tak jak figury płaskie. Lekceważy się to, że są to bryły (bo mają grubość) i nie mogą reprezentować figur płaskich.

Omawianie **błędów werbalnych** także zaczynamy od przykładów. Dorosły pokazuje dziecku rysunek kota i stwierdza *kot*, ale nawet trzylatek orientuje się, że jest to obrazek kota, a nie samo zwierzę. Uczniowie nie mają też wątpliwości, że fotografia w legitymacji szkolnej reprezentuje ucznia, ale uczniem nie jest. Niestety, takiej oczywistości nie ma w tworzeniu intuicji i zarysów pojęć geometrycznych. Słowo *trójkąt* dzieci skojarzą z narysowanym trójkątem (w nawiązaniu do geometrii płaskiej) i z trójkątną plastikową płytką (w kształcie bryły). Takie sugestie wprowadzają zamęt w rozumowaniu dzieci już na poziomie tworzenia intuicji geometrycznych. Problem w tym, że tego typu błędy w porozumiewaniu się występują na bodaj wszystkich zajęciach z geometrii płaskiej.

Zmorą edukacji wczesnoszkolnej jest **podawanie dzieciom gotowych stwierdzeń i reguł z intencją zapamiętajcie i zastosujcie w działaniu.** Tendencja ta nie słabnie, mimo blisko stuletniej wiedzy o możliwościach i ograniczeniach umysłowych dzieci oraz preferowanych sposobów uczenia się[5]).

W trakcie uważnego studiowania publikacji metodycznych i pakietów edukacyjnych dla klas początkowych ustaliliśmy, że – nawet te najnowsze – są opracowane według fałszywego przekonania, że dzieci mają możliwości umysłowe podobne do dorosłych i podobnie opanowują nowe umiejętności. Ze smutkiem stwierdzamy, że lansowanie takiej metodyki przegrywa z wiedzą o specyfice funkcjonowania umysłowego dzieci nabywaną w trakcie studiów nauczycielskich. Skutkiem tego są niepowodzenia w nauce matematyki coraz większej liczby dzieci.

Przyczynia się do tego coraz częstsze **prowadzenie edukacji w stylu *papierowej matematyki*[6], na przekór narastającej wiedzy o roli łączenia działania i rozumowania w procesie uczenia się dzieci**[7]. Zajęcia w stylu *papierowej matematyki* – w największym

[5]Przypomnieć trzeba, że wiedzę o prawidłowościach rozwoju mowy i myślenia u dzieci zawdzięczamy J. Piagetowi, zob. *Mowa i myślenie dziecka*, 1992. Korzystaliśmy z wyd. J. Piaget, 2005. Dzieło to zostało wydane pierwszy raz w 1929 r. w Polsce (Książnica Atlas, Lwów-Warszawa). Także cytowane dziś ustalenia L.S. Wygotskiego zwarte w monografii *Mowa i myślenie* (1989) są tłumaczeniem publikacji wydanej w Moskwie w roku 1966 pod tytułem *Myshlenie i riech. Problemy psichiczewskowo rozwitia rebionka.* Natomiast wiedza o sposobach, w jaki dzieci budują pojęcia, znajduje się w znanych publikacjach L.S. Wygotskiego (*Mowa i myślenie*..., s. 72–164), A. Jurkowskiego, (*Ontogeneza mowy i myślenia*, 1975, s. 121–149), a specyfikę kształtowania pojęć geometrycznych wyjaśnia A. Szemińska (*Rozwój procesu klasyfikacji*, 1991.

[6]Taka tendencja pojawiła się po II wojnie światowej, gdy przestano nawiązywać do sposobu kształcenia nauczycieli według zaleceń L. Jeleńskiej, S. Banacha, W. Sierpińskiego, W. Stożka i innych znawców edukacji matematycznej. Nasiliło ją wprowadzenie zeszytów ćwiczeń do edukacji matematycznej dzieci w latach siedemdziesiątych XX w. Więcej informacji w artykułach E. Gruszczyk-Kolczyńskiej, *Grzechy matematycznej edukacji,* 2013 oraz *Ćwierć wieku modernizacji nauczania matematyki. Pedagogiczna analiza sposobów i konsekwencji wprowadzania idei „nowej matematyki" do edukacji matematycznej,* 2017.

[7]Naukowe dowody silnego powiązania dziecięcego działania z rozumowaniem wyjaśnia S. Szuman, *Studia nad rozwojem psychicznym dziecka*, w: *Dzieła wybrane*, 1985, oraz J.S. Bruner, *Poza dostarczone informacje. Studia z psychologii poznania,* 1978.

skrócie – przebiegają tak: nauczyciel poleca dzieciom otworzyć zeszyt ćwiczeń na wybranej stronie (lub wybrać kartę pracy). Dzieci oglądają – pod jego kierunkiem – obrazkową wersję zadania i rozwiązują je, wpisując we właściwe miejsce cyfry (symbole liczb) oraz znaki działań i znaki relacji lub dorysowując brakujący element rysunku. I tak – zadanie po zadaniu, strona po stronie, od września do czerwca. Nieszczęściem edukacji matematycznej jest to, że nauczyciele pokochali *papierową matematykę*, gdyż nie muszą już:

- dbać o to, aby dzieci miały do dyspozycji przedmioty do manipulacji (np. patyczki, plastelinę), pomoce dydaktyczne (np. geoplan), narzędzia do pomiaru długości itd. Wystarczy, że otworzą zeszyt ćwiczeń lub podręcznik, a tam wszystko jest narysowane, łącznie z narzędziami pomiarowymi z podaniem wyniku pomiaru;
- przygotowywać się merytorycznie i metodycznie do zajęć. Wystarczy, że realizują polecenia i zadania zawarte na kolejnych stronach opracowanego w stylu *papierowej matematyki* podręcznika lub zeszytu ćwiczeń.

Tymczasem **edukacja prowadzona w stylu *papierowej matematyki* nie sprawdza się nawet odnośnie do wprowadzania dzieci w świat geometrii płaskiej**. Ignoruje bowiem potrzebę matematyzowania doświadczeń manipulacyjnych tak istotnych w tworzeniu intuicji i zarysów pojęć geometrycznych, nie sprzyja stawianiu pytań przez dzieci i poszukiwaniu właściwej odpowiedzi.

3. O wadach pakietów edukacyjnych[8] w obszarze geometrycznego kształcenia dzieci

W pakietach edukacyjnych wybieranych przez nauczycieli klas początkowych znacząco przesunięto zakres kształcenia – w centrum uwagi

[8] Ustaliliśmy je na podstawie analizy pakietów edukacyjnych – podręczniki, zeszyty ćwiczeń, karty pracy – respektujących zalecenia obowiązującej podstawy programowej i często wybieranych przez nauczycieli. Nie podajemy ich notek bibliograficznych, gdyż zajęło by to zbyt dużo miejsca. Ponadto, celem tego artykułu nie jest motywowanie autorów pakietów edukacyjnych do wprowadzenia odpowiednich zmian w następnych ich wydaniach. Nic jednak nie stoi na przeszkodzie, aby autorzy pakietów wyprowadzili takie wnioski po przeczytaniu tego artykułu.

jest pomaganie uczniom w tworzeniu intuicji geometrycznych, a kształtowanie zarysów pojęć geometrycznych w umysłach uczniów jest zepchnięte na margines edukacyjny. Przykładami są serie zadań, w których:

- uczniowie mają rozpoznać kształt płaskich figur geometrycznych i nazywać je: prostokąt, kwadrat, trójkąt, koło. Tymczasem z prawidłowości rozwoju umysłowego dzieci wynika, że czterolatki nie mają z tym większych kłopotów[9];
- unika się sformułowań typu pole figur geometrycznych, bo w aktualnej podstawie programowej takich określeń nie ma. Konsekwencją jest to, że dzieci gubią się już na poziomie tworzenia intuicji geometrycznych doświadczeń w trakcie obliczania obwodu i obliczania pola wybranych figur geometrycznych.

Zastanawialiśmy się nad tym, dlaczego marginalizuje się kształtowanie zarysów pojęć geometrycznych, bo jest to poważne naruszenie ciągłości edukacyjnej. **Przyczyną nie mogą być przecież możliwości umysłowe uczniów klasy II i III**. Większość z nich – mimo różnic indywidualnych – osiągnęła już poziom zaawansowanego rozumowania na poziomie konkretnym (w sensie Piageta) i może z powodzeniem konstruować w swoich umysłach zarysy pojęć geometrycznych zgodnie z ustaleniami M. Hejný'ego.

Wiele wskazuje na to, że przeszkodą w kształtowaniu zarysów pojęć geometrycznych jest zbyt rygorystyczne[10] przestrzeganie zaleceń zawartych w obowiązującej podstawie programowej. Autorom analizowanych pakietów edukacyjnych umknęło to, że podstawa programowa jest dokumentem zmienianym co kilka lat zgodnie z wolą polityczną najwyższych władz oświatowych. W każdej następnej podstawie odstępuje się – często

[9] Dowodem jest znany test H. Spionek *Zestaw figur geometrycznych stosowanych do oceny poziomu analizy i syntezy wzrokowej* (oczekuje się w nim, ze czterolatki potrafią odwzorować koło, krzyż, kwadrat itp.) w: Spionek, 1970 oraz test H. Santucci *Graficzna próba organizacji percepcyjnej dla dzieci w wieku od 4 do 6 lat (kopiowanie figur geometrycznych)* w: R. Zazo, 1974.

[10] Jest to zapewne skutek nakazowego wdrażania nowej podstawy programowej. Milcząco przyjęto, że tylko te programy i pakiety edukacyjne będą zalecane do użytku szkolnego, które zawierają dokładną wykładnię zapisów zawartych w aktualnej podstawie programowej. Mimo że zapisy te budziły – i nadal budzą – poważne wątpliwości merytoryczne dotyczące głównie treści kształcenia i respektowania ciągłości edukacyjnej.

znacznie – od ustaleń zawartych w poprzednim dokumencie tego typu[11]. Tak się dzieje od wielu lat, bez względu na negatywne konsekwencje tego i koszty drukowania nowych pakietów edukacyjnych respektujących zalecenia nowej podstawy.

Kolejną wadą szkolnego kształcenia geometrycznego dzieci jest **rozbieżność pomiędzy tym, co autorzy pakietów zalecają, a tym, jak nauczyciele kierują rozwiązywaniem zadań**. Zdecydowana większość zadań w analizowanych pakietach zawiera polecenia typu: *wytnij, przełóż patyczki, przyłóż lusterko, zmierz odległość* itd. Przeszkodą w ich realizowaniu są... drobiazgowo ilustrowane polecenia, rodzaj wizualnej instrukcji. Dlatego nauczyciele polecają uczniom oglądanie wizualnych instrukcji, zamiast mierzyć długość, wycinać kształty i manipulować nimi. Świadczą o tym wypowiedzi dzieci z kilku klas II i III. Gdy spytaliśmy je:

- czy wykonywały modele żeberkowe brył z patyczków i grudek plasteliny, zgodnie stwierdzały: *Pani nie kazała, bo są narysowane w książce*;
- czy posługiwały się lusterkiem przy oglądaniu efektów symetrii, zaprzeczały i pytały: *Lusterko? Po co?*

Z innych wypowiedzi dzieci wynika, że zamiast poleceń typu *Zmierzcie np. wysokość ławki*, słyszą *Spójrzcie na obrazek i rozwiążcie zadanie.* Oznacza to, że efektem drobiazgowo ilustrowanych zadań jest rozwiązywane ich w stylu *papierowej matematyki* ze wszystkimi negatywnymi konsekwencjami edukacyjnymi.

[11] Porównując zapisy w kolejnych podstawach programowych od połowy lat dziewięćdziesiątych ubiegłego stulecia, nie trudno dostrzec, jak bardzo zmieniały się zawarte w nich cele i treści matematycznego kształcenia. Konsekwencją zmian wprowadzanych w kolejnej podstawie programowej jest konieczność szybkiego opracowania nowych programów edukacyjnych oraz pakietów edukacyjnych. Dlatego przyjęto, że ważniejsza jest zgodność z nową podstawą i odstąpiono od sprawdzania wartości edukacyjnej autorskich programów i pakietów edukacyjnych. Zawirowania te trwają, już 20 lat, od noweli do Ustawy o systemie oświaty (7 IX 1991 r.), gdy po raz pierwszy zobowiązano ministra edukacji do ogłoszenia podstawy programowej (postanowienia w sprawie podstawy programowej znajdują w rozporządzeniu Ministra Edukacji Narodowej z 15 lutego 1999, Dz.U. 1999.14.129). Warto dodać, że odstąpiono wówczas od jednego programu edukacyjnego obowiązującego w całej Polsce, a dla zapewnienia ciągłości edukacyjnej wprowadzono podstawę programową stanowiącą bazę dla opracowania autorskich programów dla przedszkoli i kolejnych etapów edukacji szkolnej.

Mamy też poważne **zastrzeżenia do tendencji do podawania uczniom z klas początkowych gotowych uogólnień do *zapamiętania i stosowania* w działalności matematycznej**. W każdym pakiecie edukacyjnym są przedstawione sylwetki dziewczynek i chłopców, którzy podają (w chmurce) rówieśnikom uogólnienia typu: *Prostokąt o wszystkich bokach tej samej długości to kwadrat... Każdy kwadrat jest prostokątem... Boki trójkąta i prostokąta są odcinkami... Gdy jedna figura jest lustrzanym odbiciem drugiej, to są one symetryczne...*

Podawanie uczniom klas początkowych gotowych uogólnień do zapamiętania i oczekiwanie, że je zastosują w rozwiązywaniu zadań – jest sprzeczne z wiedzą o ich rozumowaniu i działalności matematycznej. Ignoruje się to, że uczniowie klas początkowych tworzą uogólnienia w wyniku porządkowania zgromadzonych doświadczeń, a więc inaczej (odwrotnie), niż to zalecają autorzy pakietów edukacyjnych. Swego rodzaju szalbierstwem jest graficzna sugestia, że autorami tych uogólnień są rówieśnicy (narysowana sylwetka dziecka i zapis uogólnienia w chmurce)[12]. Uogólnienia są bowiem formułowane według logiki dorosłych (składnia, stosowanie kwantyfikatorów itd.) i podawane z czytelną intencją *zapamiętaj i stosuj.*

Przejdźmy do **wątpliwości merytorycznych** w kształtowaniu zarysów pojęć geometrycznych. Przykładem jest ustalanie różnic i podobieństw kwadratów i prostokątów. W zadaniach, które dotyczą tej kwestii, uczniowie skupiają się na długościach boków, z pominięciem kątów pomiędzy mierzonymi bokami (bo aktualna podstawa programowa nie zaleca kształtowanie takich intuicji). Pojawia się więc pytanie, w jaki sposób uczniowie poradzą sobie z odróżnieniem kwadratu od rombu? Nie mówiąc już o kształtowaniu zarysów pojęcia kwadrat i prostokąt.

Sporo poważnych wątpliwości budzi też sposób, w jaki zaleca się zapoznawanie uczniów z bryłami. Z naszych doświadczeń wynika, że

[12]Dodać tu trzeba, że treści do zapamiętania i stosowania zamieszczano od zawsze w szkolnych podręcznikach do nauki matematyki. Zapisywano je w ramkach i nie udawano, że formułują je rówieśnicy uczniów korzystających z podręcznika. Dzięki temu uczniowie z ufnością przyjmowali ich stwierdzenie zapisane w ramkach, gdyż byli świadomi, że podręcznik napisali specjaliści – a więc osoby kompetentne. To, że w obecnie wydawanych sugeruje się graficznie, że autorami ważnych stwierdzeń są rówieśnicy, podważa zaufanie uczniów w to, że dany pakiet edukacyjny opracował ktoś, kto więcej wie i umie.

uczniowie klas początkowych potrzebują fachowego wsparcia, aby wyłuskać kształt bryły z realnych obiektów nawet wówczas, gdy mogą nimi manipulować pod kontrolą wzroku. Natomiast w pakietach edukacyjnych uczniowie ustalają, czym różnią się figury płaskie od brył... patrząc na obrazek, na którym narysowane są figury płaskie i realne obiekty przypominające bryły geometryczne[13]. Doprawdy trudno o większą ignorancję w procesie wspomagania dzieci w tworzeniu intuicji geometrycznych.

Inny przykład – w kilku pakietach edukacyjnych są serie ilustrowanych zadań z poleceniami konstruowania z patyczków i grudek plasteliny modeli żeberkowych brył. Problem w tym, że w centrum uwagi są tam tylko krawędzie i naroża, z pominięciem kształtu ścian brył. Nie podaje się też nazw brył, których żeberkowe modele dzieci konstruują. Pojawia się pytanie, jak – po takich doświadczeniach – uczniowie mają tworzyć zarysy pojęć geometrycznych.

Kolejne wątpliwości dotyczą rozbieżności pomiędzy realnymi możliwościami umysłowymi dzieci a zalecanymi treściami kształcenia geometrycznego. Większość zadań zawartych w omawianych pakietach edukacyjnych jest dostosowana do możliwości umysłowych dzieci o wiele młodszych. Wynika to zapewne ze słabej znajomości rozwoju umysłowego dzieci. Potwierdzeniem tego jest historyjka zamieszczona w pewnym podręczniku do klas III. Przedszkolak skarży się starszemu bratu, że trudno mu narysować koło, chociaż narysował już kwadrat i trójkąt. Czyżby autorzy tej historyjki nie wiedzieli, że przedszkolaki nie mają kłopotów z narysowaniem koła? Innym przykładem są zadania z dostrzeganiem efektu symetrii, zawarte w wielu podręcznikach dla uczniów klasy II i III. Z naszych doświadczeń wynika, że starsze przedszkolaki radzą sobie z zadaniami o zdecydowanie wyższym stopniu trudności. Zamieszczanie infantylnych treści kształcenia w edukacji uczniów sprawia, że się nudzą i przestają interesować się działalnością

[13]Na przykład w jednym z analizowanych podręczników w ilustrowanym zadaniu są przedstawione realne obiekty (książka, wiaderko, okulary, sandałek itd.) z poleceniem, aby dzieci ustaliły – na podstawie śladów odciśniętych na piasku przez narysowane (!) przedmioty – czym różnią się bryły od figur płaskich. Takiego absurdu metodycznego nie ratuje nawet podane – w tym samym podręczniku uogólnienie... *Wszystkie figury płaskie mogą być wiernie przedstawione na kartce. Żaden obrazek płaski, nawet najpiękniejszy, nie jest figurą przestrzenną.*

matematyczną. Zaś konsekwencją unikania kształtowania zarysów pojęć geometrycznych są niepowodzenia w nauce matematyki nasilające się w klasie czwartej i następnych.

4. O różnicach w kształtowaniu intuicji i zarysów pojęć geometrycznych

Z wcześniej przedstawionych ustaleń wynika, że szkolną edukację geometryczną świadomie zawężono do intuicji geometrycznych, chociaż możliwości umysłowe uczniów klas początkowych pozwalają na kształtowanie zarysów pojęć geometrycznych. Warto więc wyjaśnić relacje pomiędzy intuicjami i zarysami pojęć geometrycznych.

Intuicje geometryczne dzieci tworzą, stykając się z obiektami o różnym kształcie, wielkości i kolorze w naturalnym otoczeniu. Poznają je manipulacyjnie – pod kontrolą wzroku – i przeplatają realnie wykonywane czynności ze swoimi przemyśleniami. Często dochodzą do wniosków odległych od tych, których efektem są intuicje geometryczne. Dlatego nauczyciel ma organizować dzieciom sytuacje zadaniowe, w których manipulują one odpowiednio dobranymi obiektami, a on kieruje ich spostrzeżeniami i pomaga formułować przemyślenia. Chodzi o to, aby koncentrowali się na wydobywaniu tych cech poznawanych obiektów, które są istotne przy tworzeniu intuicji geometrycznych. Trzeba podkreślić, że na poziomie tworzenia intuicji dzieci nie definiują cech obiektów, lecz opowiadają o nich i o tym, jak są umiejscowione w otoczeniu.

Takie wprowadzanie dzieci w świat geometrii nie odbywa się w izolacji – równolegle uczniowie uczą się coraz lepiej klasyfikować i doskonalą umiejętności rachunkowe, zaczynają rozumieć sens pomiaru długości i opanowują umiejętność mierzenia. Mogą więc mierzyć i porównywać długości krawędzi, obliczać obwód, pole i objętość wybranych figur geometrycznych. Dzięki temu potrafią w miarę precyzyjnie przedstawić istotne cechy brył i figur płaskich w rysunku geometrycznym, a także konstruować żeberkowe i kartonowe modele brył ze świadomością uwzględniania w nich najważniejszych ich cech. Wnioski z takich aktywności – jeżeli nauczyciel w tym pomoże – uczniowie mają ujmować w formie **zarysów pojęć geometrycznych.**

Z doświadczeń zgromadzonych w trakcie wdrażania *Dziecięcej matematyki* w edukacji wczesnoszkolnej wynika, że wspomaganie dzieci

w przechodzeniu z intuicji i zarysów pojęć geometrycznych musi uwzględniać zależności pomiędzy ich działalnością ruchową i rozumowaniem. Dobre efekty daje korzystanie z ustaleń S. Szumana[14] o związku działania z rozumowaniem oraz o tym, jak należy odpowiadać na pytania, które zadają dzieci, dążąc do wyjaśnienia wątpliwości spowodowanych trudnościami poznawczymi. Trzeba też korzystać z nabywanych przez dzieci umiejętności w coraz lepszym orientowaniu się w przestrzeni, a także rosnących sprawności w zakresie mierzenia długości oraz umiejętności rachunkowych potrzebnych przy obliczeniach obwodu, pola i objętości wybranych figur geometrycznych.

W związku z tym dzieci muszą mieć do dyspozycji specjalnie dobrane przedmioty: większe klocki o kształcie np. sześcianu, prostopadłościanu, walca, kuli, płytki lub kartoniki o określonym kształcie (w różnym kolorze i różnej wielkości), przedmioty pomocne w ustalaniu cech brył i figur płaskich (pion, poziomica, kątownik, geoplan, tablica z siecią kwadratową itd.), narzędzia do pomiaru długości (np. linijka, miarka krawiecka i stolarska) oraz patyczki, gumki, sznurki, plastelinę itd. W trakcie korzystania z tych przedmiotów w działalności matematycznej dzieci zadają wiele pytań. Na niektóre z nich same odpowiadają, ale większość kierują do nauczyciela, oczekując sensownej odpowiedzi. W formułowaniu ich pomocne są ustalenia S. Szumana. Przytaczamy ważniejsze, gdyż trzeba się nimi kierować, prowadząc nauczanie w edukacji domowej, przedszkolnej i szkolnej.

5. O rozmawianiu z dziećmi w trakcie tworzenia zarysów pojęć geometrycznych – zalecenia S. Szumana

S. Szuman przyjął, że pytania dzieci wraz z pasującą do nich odpowiedzią tworzą pełny akt myślenia[15]. Wyróżnił w nim trzy zestrojone

[14] Ustalenia o silnym związku między aktywnością ruchową i rozumowaniem dzieci formułuje S. Szuman w rozprawach: *Rola działania w rozwoju umysłowym małego dziecka*, 1955 oraz *Badania nad rozwojem umysłowości dziecka na tle jego pytań*,1939, zob. też jego *Dzieła wybrane*, tom 1, 1985.

[15] Pełny akt myślenia – do którego nawiązuje S. Szuman – opisał J. Dewey w książce *Jak myślimy,* 1988. Jest to wznowienie publikacji wydanej w 1934 r. w przekładzie Z. Bastgenówny i ze wstępem Z. Mysłakowskiego, Lwów-Warszawa, Książnica Atlas. Wiele zawartych w niej ustaleń jest aktualnych i cytowanych przy omawianiu metod przydatnych w procesie kształtowania uczniowskiego umysłu. Dla naszych rozważań

ze sobą kroki (stopnie): dwa pierwsze realizuje dziecko, stawiając pytanie, trzeci to odpowiedź dorosłego. Ustalił, że dzieci zadają pytania, gdy są zaniepokojone czymś nowym i nieznanym. Pytania są skutkiem odczuwanej trudności poznawczej, niejasności myślowej. Pytając, dzieci określają słowami niejasność, czyli konkretyzują to, czego jeszcze nie wiedzą i czym są zaniepokojone.

Dorosły – w edukacji wczesnoszkolnej nauczyciel – odpowiadając na pytanie dzieci, wyjaśnia tę niejasność myślową, a więc podaje rozwiązanie ich myślowego problemu. Szuman ustalił, że taka odpowiedź zamyka wspólnie realizowany akt poznania i myślenia. Pytające dzieci przyjmują bowiem odpowiedź dorosłego z bezgranicznym zaufaniem i włączają ją do swojego rozumowania. Dlatego dzieci nie krytykują odpowiedzi i wyjaśnień udzielonych przez dorosłego, ani ich nie sprawdzają przez obserwację lub przez doświadczenie[16].

Przytoczone ustalenia Szumana znakomicie wpisują się w proces wspomagania dzieci w rozwijaniu intuicji i zarysów pojęć geometrycznych. Z naszych doświadczeń pedagogicznych wynika, że znakomite rezultaty edukacyjne otrzymuje się, gdy nauczyciel konkretyzuje te zalecenia w następujący sposób:

- z uwagą wsłucha się w pytanie dzieci, ale wstrzyma się od odpowiedzi;
- zdziwieniem, gestem i słowem skłania je do zastanawiania się, do sformułowania przypuszczeń lub zadania następnego, bardziej precyzyjnego pytania;
- uzupełnia dziecięce przypuszczenia informacjami, które są jeszcze poza zasięgiem tego, co one mogą samodzielnie ustalić.

---

ważne jest to, że Dewey (s. 102 i dalsze) w akcie myślenia wyróżnia pięć stopni, z czego dwa pierwsze zwykle zlewają się ze sobą. Są to: 1) odczucie trudności, 2) jej wykrycie i określenie, 3) nasuwanie się możliwego rozwiązania, 4) wyprowadzenie wniosków przypuszczalnego rozwiązania, 5) doświadczalne ich potwierdzenie lub zaprzeczenie.

[16] Uzupełnieniem tych ustaleń jest opracowana przez S. Szumana *Pedagogika pytań* (znajduje się w cytowanej już publikacji *Rozwój pytań u dziecka...*, s. 306–323). Wyjaśnia w niej, w jaki sposób dorośli mają traktować dziecięce pytania i jak mają na nie odpowiadać.

Szczegółowy opis takiej metody wspomagania dzieci w formułowaniu przemyśleń i uogólnień podamy, opisując sposoby wspomagania dzieci w tworzeniu zarysów pojęć w obszarze geometrii bryły.

6. Kilka dodatkowych argumentów przemawiających za preferowaniem geometrii brył w edukacji matematycznej dzieci

Jak już wyjaśniliśmy, w Polsce wprowadza się dzieci w świat geometrii, poczynając od figur płaskich. Reprezentacjami tych figur są narysowane kształty trójkątów, prostokątów, kwadratów itd. Zaletą i jednocześnie wadą jest to, że narysowane kształty nie mają grubości, ale nie sposób nimi manipulować, a to utrudnia dzieciom tworzenie intuicji i zarysów pojęć geometrycznych. Takich komplikacji unika się w obszarze geometrii brył. Kostka – wykonana np. z drewna – jest reprezentacją pojęcia sześcian. Bryłę tę dzieci obejmują dłonią i dotykiem, doświadczając kształtu jej ścian. Mogą przeciągnąć palcami po krawędziach sześcianu i policzyć je, zobaczyć, w którym miejscu się stykają, a palcami odczuć ostrość wierzchołków.

Nauczycielowi o wiele łatwiej jest porozumiewać się z uczniami, gdyż w geometrii bryły stosuje się podobne określenia słowne do tych, które używane są w codziennych sytuacjach. Na przykład dzieci, określając kształt ścian, np. sześcianu, odpowiadają na pytanie *W jakim są kształcie? Kwadratowym.* Dotyczy to także krawędzi i naroży brył.

Podobnymi spostrzeżeniami kierował się zapewne półtora wieku temu F. Fröbel[17], wprowadzając dzieci w świat geometrii w zabawach

[17]Idee pedagogiczne F. Fröbel zawarł w publikacji *Kindergartenwesen* (Pichler, Wien 1883). W końcu XIX wieku ukazały się w Polsce publikacje przedstawiające koncepcję F. Fröbela: w roku 1872 publikacja H. Goldhammer, *Ogródek dziecięcy. Metoda wychowania i nauczania dzieci* (*podług pism Fryderyka Fröbela skreślił H. Goldhammer*), w 1891 r. rozprawę *System Fröbela* opublikowała Z. Roszkowska. W latach międzywojennych S. Kot przedstawia idee Fröbela w publikacji *Źródła do historii wychowania* (wybór), Część 2, Geberthner i Wolff, Warszawa 1930. Prawie 50 lat później W. Bobrowska-Nowak zamieściła rozdział *Fryderyk Fröbel o znaczeniu zabawy* w swojej znanej i cenionej publikacji *Historia wychowania przedszkolnego*, WSiP, Warszawa 1978.

z *Darami*[18]. Nieco później znany polski matematyk S. Dickstein[19] wprowadzanie uczniów w świat geometrii rozpoczyna od poznawania brył. W przedmowie do wydania pierwszego publikacji *Początkowa nauka geometryi w zadaniach* stwierdza (s. 6) ... *Nauka rozpoczyna się od obznajomienia ucznia z sześcianem i prowadzi go następnie do własności różnych figur, do konstrukcji na płaszczyźnie i do własności kilku innych brył...* Nasze doświadczenia pedagogiczne zgromadzone w trakcie wspomagania dzieci w rozwijaniu intuicji i kształtowaniau zarysów pojęć także przemawiają za tym, aby kształtowanie intuicji i zarysów pojęć rozpocząć od geometrii brył.

7. Geometria brył: opisy wzorcowych zajęć wspomagających uczniów w przechodzeniu z intuicji do zarysów pojęć

W jednym artykule nie sposób przedstawić złożonego procesu kształtowania intuicji i zarysów pojęć w obszarze geometrii brył. Dlatego w tej części artykułu przedstawimy opis dwóch serii zajęć, których celem jest wspomaganie uczniów w przechodzeniu z intuicji do zarysu pojęć geometrycznych. Następnie podajemy krótki komentarz metodyczny i odwołujemy się do zaleceń konstruktywizmu. Mamy nadzieję, że pomoże to czytelnikom dostrzec walory wprowadzania dzieci w świat geometrii, poczynając od geometrii bryły.

7.1. Sześcian. Intuicje i zarysy pojęć

W tej serii zadań nauczyciel i każdy uczeń ma do dyspozycji sześcian (np. klocek z drewna lub plastiku) tak duży, aby z trudem mieścił się w dłoni, narzędzia do precyzyjnego określania cech sześcianu (pozio-

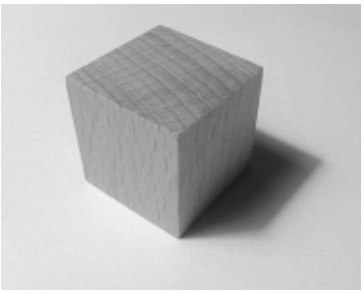
[18]Tak Fröbel nazwał zestawy przedmiotów z drewna. Zawierały kule, sześciany, prostopadłościany, walce, graniastosłupy trójkątne, patyczki, płytki o różnych kształtach i kolorach. Opis *Darów* znajduje się w publikacji: E. Gruszczyk-Kolczyńska, J. Kozieł *Zastosowanie Darów Fröbela w Dziecięcej matematyce*, 2017, s. 10–16.

[19]Por. S. Dickstein *Geometryja*, Warszawa 1889 (*z dopiskiem: w drukarni Józefa Sikorskiego pod zarządem Aleksandra Saladyckiego, Warecka 14*), *Początkowa nauka geometryji w zadaniach*, Warszawa 1906 (z dopiskiem *Druk Tow. Akc. S. Orgelbranda S-ów*). Cytujemy fragment z wydania czwartego tej publikacji, z przedmową do wydania pierwszego opatrzoną datą – czerwiec 1881 r.

mica[20], węgielnica[21], linijka z podziałką milimetrową), grubszy karton z wykreśloną siecią kwadratową[22], małe sześcienne klocki (o boku 1 cm), patyczki, plastelinę, papier w kratkę, nożyczki, klej, ołówki, kredki, nożyczki.

7.2. Intuicyjne ustalanie własności sześcianu

Nauczyciel i uczniowie oglądają palcami pod kontrolą wzroku ścianki klocka i ustalają, że są podobne w kształcie i wielkości.



Nauczyciel pyta o **kształt ścian bryły**, uczniowie stwierdzają: *Są kwadratowe* (wszak znają słowo kwadrat). Liczą ścianki i ustalają, że klocek ma 6 takich ścian. Nauczyciel stwierdza: *Klocek, który ma wszystkie ściany w kształcie kwadratów, jest sześcianem. Jest bryłą sześcienną. Można powiedzieć krótko* ***sześcian***.

Następnie uczniowie analizują **krawędzie i naroża sześcianu**:
a) wodzą palcami po krawędziach sześcianu,
b) stawiają bryłę na stole, liczą górne krawędzie (jest ich 4), dolne krawędzie (także jest ich 4) i boczne krawędzie (ich też jest 4),

[20] Nauczyciel może wspólnie z uczniami wykonać **małą poziomicę**. Trzeba tylko: a) do czystej i pustej fiolki (np. po olejkach do ciast) wlać wodę i zakorkować, b) położyć zakorkowaną fiolkę na blacie stolika i obserwować położenie bańki powietrza, c) oznaczyć kreskami miejsce bańki, gdy pokazuje poziom. Można też postarać się o gotową poziomicę typu szkolnego (są w zestawach pomocy dydaktycznych).

[21] Wykonanie **małej węgielnicy** jest jeszcze łatwiejsze: a) ze sztywnego kartonu wyciąć kształt prostokąta o wymiarach np. 5 cm x 7 cm, b) w rogu tego kartonika narysować mniejszy prostokąt (np. o wymiarach 4 cm x 6 cm) i wyciąć go. Węgielnica potrzebna do tych i następnych zajęć jest gotowa.

[22] Może to być gruby karton w kształcie kwadratu (o boku ok. 50 cm) z wykreśloną siecią kwadratową o oczkach kwadratowych o boku 1 cm.

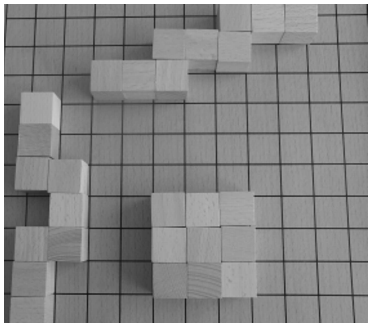
c) ustalają – razem jest 12 krawędzi,
d) ujmują sześcian dłonią i oglądają miejsca stykania się krawędzi,
e) nauczyciel stwierdza: *To są wierzchołki, można też powiedzieć naroża sześcianu*,
f) uczniowie liczą je i ustalają, że jest ich 8.

Układanki z sześcianów – seria sytuacji zadaniowych

Każdy z uczniów ma do dyspozycji około 40 małych klocków w kształcie sześcianów (o boku 1 cm) oraz planszę z siecią kwadratową (oczka to kwadraty o boku 1 cm). Nauczyciel zapowiada: *Będziemy układać sześciany na planszy w specjalny sposób.*

Układanka pierwsza

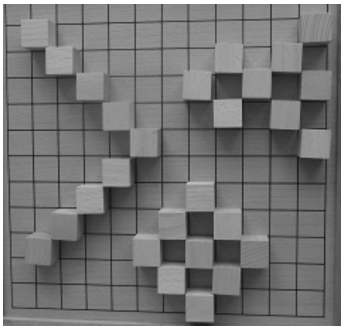
Nauczyciel zwraca się do uczniów: *Każdy z nas weźmie 9 małych klocków sześciennych... Będziecie układać je na planszy tak, aby stykały się ścianami.* Możliwości jest sporo, na fotografii poniżej przedstawione są przykładowe układanki.



Uczniowie sprawdzają, czy wszystkie sześciany ułożone na planszy stykają się ściankami z innymi sześcianami oraz które sześciany stykają się z innymi sześcianami jedną, dwiema i większą liczbą ścianek. Na koniec uczniowie zastanawiają się, czy można ustalić – licząc kratki na planszy – jaką przestrzeń zajmują małe ułożone sześciany w danej układance.

Układanka druga

Nauczyciel zwraca się do uczniów: *Będziemy układać sześciany inaczej. Mogą się stykać tylko krawędziami.* Na fotografii poniżej pokazano kilka sposobów takiego ułożenia sześcianów.



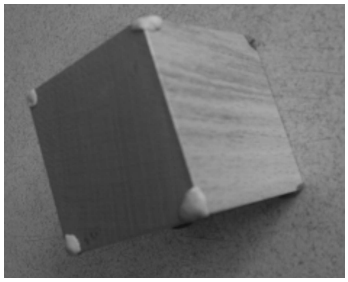
Tak jak poprzednio uczniowie sprawdzają, czy wszystkie sześciany ułożone na planszy stykają się krawędziami, które sześciany stykają się jedną krawędzią, dwiema, trzema, a nawet czterema krawędziami. Uczniowie zastanawiają się, czy można obliczyć, jaką przestrzeń zajmują ułożone klocki.

7.3. Sześcian: wspomaganie uczniów w tworzeniu zarysów pojęć

W tej serii zadań uczniowie mają do dyspozycji sześciany (o tym samych wymiarach) z poprzedniej serii zajęć, 30 małych klocków o kształcie sześcianów, kartonowe pudełko o kształcie sześcianu oraz kątownicę, linijkę z podziałką milimetrową, patyczki i plastelinę, papier w kratkę, ołówek, nożyczki i przezroczystą taśmę klejącą. Nauczyciel ma dodatkowo klocek w kształcie prostopadłościanu.

Sześcian. Ile naroży ma ta bryła?

Nauczyciel zwraca się do uczniów: *Zajmujemy się rogami sześcianu. Oglądamy je palcami... Pamiętacie – nazywa się je narożami sześcianu. Oznaczymy je grudkami plasteliny i policzymy.* Jest to pokazane na fotografii.



Uczniowie ustalają, że u góry sześcianu są 4 naroża, a dołu także 4 – razem 8 naroży. Oglądają mniejsze klocki w kształcie sześcianu, dotykają naroży, liczą je... Na koniec formułują uogólnienie: *Sześciany mają po osiem naroży.*

Sześcian. Mierzenie krawędzi

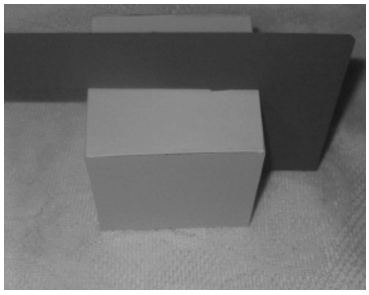
Nauczyciel zwraca się do uczniów: *Potraficie mierzyć długość z dokładnością do milimetra. Zamierzcie krawędzie większego sześcianu. Zapiszę wynik pomiaru...* Uczniowie mierzą wybraną krawędź, podają wynik pomiaru, nauczyciel zapisuje wyniki i zastanawia się: *Czyżby krawędzie sześcianu miały tę samą długość? Sprawdźcie to.* Uczniowie wykonują polecenie i stwierdzają: *Krawędzie są tej samej długości.* Nauczyciel pokazuje im sześcian i jego krawędzie. Uczniowie stwierdzają: *Krawędzie sześcianu są tej samej długości.*

Sześcian. Pod jakim kątem stykają się jego ściany?

Nauczyciel zwraca się do uczniów: *Co już wiemy o ścianach tej bryły?* Uczniowie stwierdzają: *Są kwadratami!* Nauczyciel potwierdza: *Tak. Ustalimy, pod jakim kątem stykają się ściany sześcianu. Pomoże nam w tym kątownica.* Następnie wyjaśnia, że kątownica jest narzędziem, którym posługuje się każdy budowniczy, dbając o to, aby ściany w budynkach stykały się pod kątem prostym[23]. Kątownica służy do ustalania, które kąty są proste, a które takimi nie są[24]. Uczniowie zastanawiają się, jak ustalić pod jakim kątem stykają się ściany sześcianu. Ustalają, że jest to łatwe – wystarczy przyłożyć kątownicę do krawędzi bryły tak, aby jej ramiona stykały się ze ścianami.

[23] Jeżeli uczniowie chcą sprawdzić, czy ściany w pokoju stykają się pod kątem prostym, nauczyciel zachęca i pokazuje, w jaki sposób można się o tym przekonać.

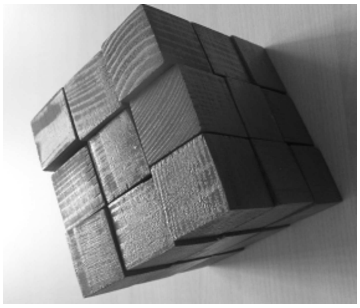
[24] Jeżeli uczniowie są zainteresowani, nauczyciel pokazuje gestami i wyjaśnia: *To są kąty ostre* (pokazuje, że mieszczą się w kącie prostym), *a te kąty nazywamy rozwartymi* (pokazuje, że wychodzą poza zakres kąta prostego). Na tym etapie kształcenia wystarczy intuicyjne rozumienie kątów. W następnych latach szkolnej edukacji uczniowie stworzą zarys pojęcia *kąt* i ustalą, czym się mierzy *kąty*, jakie są wymiary kątów ostrych, prostych i rozwartych.



Po dokonaniu kilku pomiarów kątów uczniowie – przy niewielkiej pomocy ze strony nauczyciela – formułują uogólnienie: *W sześcianach ściany stykają się w krawędziach pod kątem prostym.*

Budowanie większych sześcianów z małych sześcianów

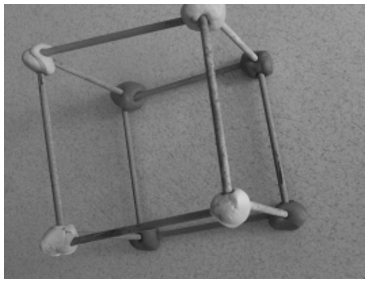
Nauczyciel zwraca się do uczniów: *Postarajcie się zbudować na planszy z siecią kwadratową duże sześciany z małych sześciennych klocków. Najpierw z ośmiu małych klocków, potem z większej liczby klocków.* Na fotografiach przedstawiony jest sześcian ułożony z 8 mniejszych sześciennych klocków oraz sześcian ułożony z 27 mniejszych sześciennych klocków.



Na koniec uczniowie ustalają, że sześciany zbudowane z mniejszych klocków sześciennych mają także po 6 ścian, 12 krawędzi i 8 wierzchołków.

Sześcian – konstruowanie modelu żeberkowego

Skonstruowanie modelu żeberkowego z patyczków i grudek plasteliny nie jest trudne, wszak uczniowie wcześniej ustalili, ile krawędzi ma sześcian i to, że stykają się one w 8 narożach. Wiedzą też, pod jakimi kątami stykają się kwadratowe ściany w krawędziach.



Chociaż w żeberkowym modelu sześcianu nie ma ścian, uczniowie mogą je sobie wyobrazić na zasadzie wizualizacji, przesuwając dłoią po wyobrażonych ścianach. Nauczyciel zwraca się do nich: *Pokażcie ściany sześcianu z zamkniętymi oczami. Jedną ręką trzymajcie żeberkowy model, drugą starajcie się pokazać ściany. Co możecie o tych ścianach powiedzieć?*

Kartonowy model sześcianu

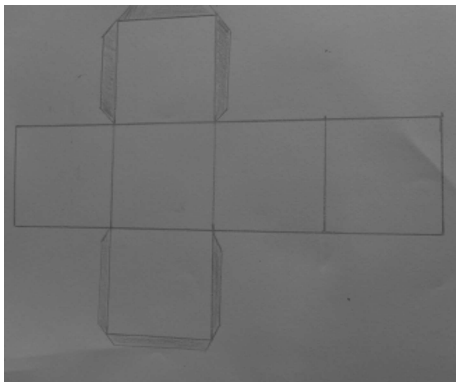
Nauczyciel zwraca się do uczniów: *Wykonamy kartonowy model sześcianu. Oglądnijcie pudełko... Rozetniemy je i rozłożymy karton.* Uczniowie wykonują polecenie. Porównują kształt rozciętego pudelka z bryłą sześcianu. Nauczyciel wyjaśnia, że tak rozcięty karton jest *siatką sześcianu.* Że, aby wykreślić siatkę sześcianu, trzeba znać wymiary ścian. Jeżeli rysunek siatki sześcianu jest dokładny, to po jej wycięciu można go złożyć w kartonowy model bryły.

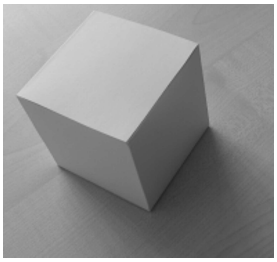
Ponieważ jest to trudne, nauczyciel proponuje, że wykreśli siatkę sześcianu na papierze w kratkę, a uczniowie mu w tym pomogą. Jeszcze raz oglądają rozcięte pudełko i ustalają, że:

a) 4 ścianki stykają się ze sobą jedną krawędzią i są narysowane w szeregu;

b) 2 ścianki są dorysowane po przeciwnych bokach.

Nauczyciel kreśli siatkę sześcianu, wycina ją i formułuje z niej sześcian. Wybrany uczeń pomaga mu połączyć ścianki sześciokąta przezroczystą taśmą i... kartonowy model sześcianu jest gotowy. Na fotografiach poniżej przedstawiona jest siatka sześcianu i kartonowy model bryły.





Uczniowie w parach:
a) ustalają wymiary kwadratowej ściany,
b) korzystając z pokazowej instrukcji, kreślą na kartkach w kratkę siatkę sześcianu,
c) wycinają ją i składają,
d) na koniec łączą ścianki sześciokąta przezroczystą taśmą.

Z naszych doświadczeń wynika, że kreśleniu siatki (rysunek geometryczny) towarzyszy ożywiona rozmowa. Uczniowie formułują mnóstwo pytań, na niektóre sami odpowiadają, inne kierują do nauczyciela i czekają na jego wyjaśnienia. Sprzyja to precyzowaniu zarysu pojęcia sześcian.

7.4. Kula – wspomaganie uczniów w tworzeniu intuicji i zarysów pojęć

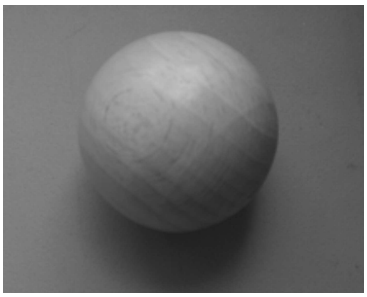
Kształtowanie intuicji i zarysów pojęcia kuli jest trudne, chociaż jest to jedna z pierwszych brył poznawanych przez maluchów dotykiem pod kontrolą wzroku. Potem – jak tylko dzieci zaczynają raczkować i stawiać pierwsze kroki – otrzymują piłkę do zabawy.

W tej serii zajęć uczniowie mają do dyspozycji kulę o takiej wielkości, że można ją objąć dłonią (może być wykonana z drewna lub plastiku), kątowniki i linijkę oraz plastelinę i 2 deseczki lub nieco większe kartoniki. Nauczyciel ma dodatkowo do dyspozycji klocek w kształcie sześcianu, klocek w kształcie prostopadłościanu[25], pomarańczę i nożyk.

[25] W artykule tym – ze zrozumiałych względów – przedstawiamy sposób kształtowania zarysów pojęć tylko niektórych brył. W naszej koncepcji wprowadzania w świat

Intuicyjne ustalanie cech kuli

Nauczyciel pokazuje uczniom klocki w kształcie sześcianu, prostopadłościanu i kuli i poleca: *Pokażcie tę bryłę, której jeszcze nie poznaliśmy.* Nasi uczniowie stwierdzili: *Znamy wszystkie.* Byli bowiem przeświadczeni, że znają także kulę, gdyż silnie kojarzyła się im z piłką. W takiej sytuacji nauczyciel pyta: *Jeżeli znacie tę bryłę* – wskazuje kulę – *to powiedzcie mi, czy kula ma krawędzie?*



Uczniowie oglądają kulę i zapewne stwierdzą: *Kula nie ma krawędzi.* Nauczyciel pyta: *To może ma naroża?* Uczniowie odpowiadają np. *Nie, bo nie ma krawędzi!* Nauczyciel pyta: *Czy kula ma ścianę?* Uczniowie wodzą palcami po kuli i wahają się. Nauczyciel stwierdza: *Dotykacie powierzchni kuli. Kula ma zakrzywioną powierzchnię. Czy potraficie wskazać miejsce, gdzie jest początek tej powierzchni?*

Zwykle uczniowie są zaskoczeni pytaniami, wodzą palcami po powierzchni kuli i... milczą. Nauczyciel stwierdza: *Powierzchnia kuli nie ma ani początku, ani końca. Kula nie ma też krawędzi i naroży. Zastanówcie się, jakie przedmioty mają kształt zbliżony do kuli.* Uczniowie wymieniają takie przedmioty, a potem wspólnie z nauczycielem ustalają, w czym są one podobne, a czym różnią się od kuli.

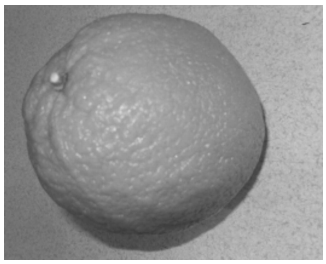
Kula – wspomaganie uczniów w tworzeniu modelu tej bryły

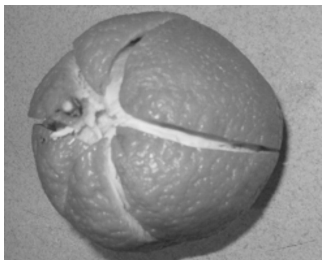
Nauczyciel zwraca się do uczniów: *Poprzednio robiliśmy modele brył. Kula jest bryłą. Czy można wykonać żeberkowy model kuli?* Uczniowie

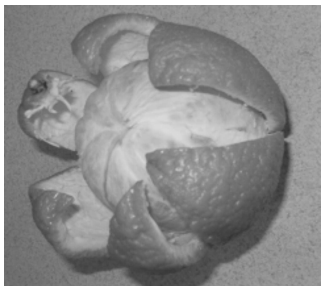
geometrii, począwszy od geometrii brył, dba się o to, aby dzieci poznawały też prostopadłościan, walec, ostrosłup o podstawie kwadratowej. Dlatego w opisie tej serii zajęć nauczyciel może odwoływać się do prostopadłościanu, gdyż uczniowie już zajmowali się tą bryłą na poziomie tworzenia intuicji i zarysów pojęć.

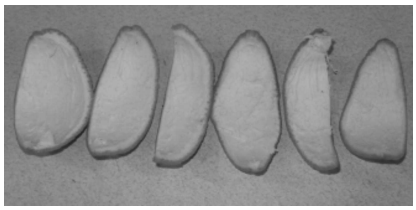
zapewne zaprzeczą. Nauczyciel pokazuje im pomarańczę. Wspólnie ustalają, że pomarańcza kształtem zbliżona jest do kuli, ale są też znaczące różnice:
a) na powierzchni kuli nie sposób ustalić początku i końca ściany;
b) natomiast na pomarańczy jest zaznaczony czubek owocu i miejsce umocowania do łodygi pomarańczowego drzewka.

Dzieci dochodzą do wniosku, że mimo tych różnic można dowiedzieć się, jak – w przybliżeniu – ustalić powierzchnię kuli. Można przecież zdjąć z pomarańczy skórkę w specjalny sposób[26] i zobaczyć, jak ona wygląda. Na fotografiach poniżej jest przedstawiona pomarańcza ze skórką oraz skórka z pomarańczy z promieniście odchylającymi się sferycznymi fragmentami.





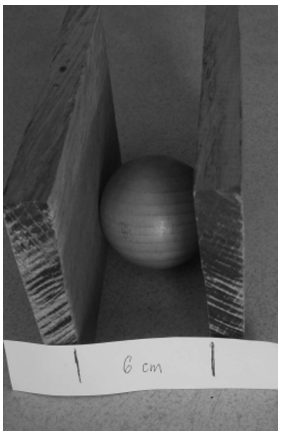




[26]Wyjaśniam, że trzeba nacinać skórkę nożem od czubka do nasady (tam, gdzie owoc stykał się z gałązką) tak, aby nacięcia przypominały południki wykreślone na globusie. Trzeba odchylać ostrożnie sferyczne fragmenty skórki i nie odrywać sferycznych fragmentów – mają przy nasadzie się łączyć.

Uczniowie wspólnie z nauczycielem kilka razy składają **sferyczne fragmenty** powierzchni pomarańczy tak, aby obejmowały mięsistą część owocu, i rozkładają je, żeby lepiej przyjrzeć się sferycznym fragmentom. Potem rozważają, czy potrafią wykreślić je tak, aby po sklejeniu uzyskać model kartonowy kuli.

Okazuje się, że takimi umiejętnościami nie dysponuje ani nauczyciel, ani uczniowie. Wspólnie podejmują decyzję – można ulepić model kuli z modeliny (plasteliny, gliny). Pojawił się jednak następny problem – jak wielki ma być model kuli. Nauczyciel radzi, aby **zmierzyć średnicę kuli** i proponuje wsunąć bryłę pomiędzy 2 deseczki (sztywne kartony), a potem zmierzyć odległość między ich wewnętrznymi ścianami. Po zastanowieniu ustalono, że deseczki te muszą stykać się z blatem stołu pod kątem prostym, w związku z czym należy posłużyć się kątownicami. Na fotografii przedstawiony jest opisany sposób ustalania średnicy kuli.



Nauczyciel pokazuje odległość pomiędzy zewnętrznymi ścianami deseczek i stwierdza: *To jest średnica tej kuli.* Uczniowie mierzą tę odległość i już wiadomo – *Trzeba ulepić model kuli o średnicy 6 cm.* Na tym nie koniec, gdyż – po ulepieniu modelu kuli – trzeba będzie sprawdzić, jaka jest jego średnica. Nie jest to trudne, gdyż uczniowie znają metodę pomiaru średnicy kuli i potrafią z niej skorzystać. Uwzględniając wyniki pomiaru, wybrani uczniowie wskazują swój model kuli i stwierdzają: *To jest model kuli o średnicy 6 cm i 15 mm.*

8. Komentarze, zalecenia i wnioski pedagogiczne

Wprowadzenie uczniów w świat geometrii brył przedstawiliśmy w formie krótkich opisów sporządzonych na podstawie autentycznych zajęć realizowanych w klasach początkowych. Opisy te sporządzaliśmy tak, aby czytelnik mógł dostrzec reguły, którymi kierowaliśmy się we wspomaganiu uczniów w rozwijaniu intuicji i zarysów pojęć realizowanych w ramach geometrii bryły.

Nim je przedstawimy, kwestia najważniejsza – nauczyciel powinien odstąpić od maniery podawania uczniom gotowej wiedzy na zasadzie: *Powiem wam, jak jest... Słuchajcie i zapamiętajcie... Zastosujecie to, co powiedziałem, w rozwiazywaniu zadań.* Jeżeli nawet uczniowie zapamiętają podane przez nauczyciela informacje, rzadko z nich skorzystają. Oczekują bowiem dokładnej instrukcji, w jaki sposób mają stosować zapamiętane wskazówki. Przyjmują – na zasadzie oczywistości – że jeżeli nauczyciel podał im gotową wiedzę, ma też wyjaśnić, w jaki sposób trzeba z niej skorzystać, i chcą, aby krok po kroku kierował tym, co mają zrobić.

Prowadzenie zajęć w opisanej manierze nie da się pogodzić z przedstawioną koncepcją wprowadzania uczniów w świat geometrii. Zalecamy bowiem następujące reguły pedagogiczne:

- **Warunkiem skutecznego rozwijania intuicji i kształtowania zarysów pojęć geometrycznych jest proces uczenia się, w którym uczniowie łączą manipulowanie specjalnie dobranymi przedmiotami z rozumowaniem.** Z tych powodów uczniowie oraz ich nauczyciele muszą mieć do dyspozycji przedmioty, które są im potrzebne do rozwijania intuicji i kształtowania zarysów pojęć geometrycznych ściśle związanych z daną bryłą. Niedopuszczalne jest prowadzenie zajęć w – opisanej w tym artykule – manierze *papierowej matematyki*;
- **W trakcie rozwijania intuicji i zarysów pojęć geometrycznych nauczyciel kieruje procesem uczenia się uczniów w następujący sposób**:
  - **organizuje wspólne pole uwagi i działania**[27] oznacza to, że nauczyciel i uczniowie zajmują się tym samym: koncentru-

[27] W literaturze dotyczącej procesu kształcenia matematycznego nie udało się nam

ją uwagę na tych samych bryłach i stosują te same narzędzia do poznania ich cech oraz w podobny sposób dążą do ich poznania;
- **stopniowo rozszerza uczniowskie czynności poznawcze** wybranej bryły poprzez stawianie pytań, skłanianie uczniów do zastanowienia się, inicjowanie czynności manipulacyjnych i konstrukcyjnych;
- **skłania uczniów do samodzielnego działania i wspiera ich**, uruchamiając modelowanie i naśladownictwo w trakcie wykonywania trudniejszych czynności.

W trakcie takiego kierowania procesem uczenia się uczniowie mogą pracować (uczenie się jest przecież rodzajem pracy) samodzielnie lub w parach.

- **Ważne jest to, aby nauczyciel nie krępował u uczniów naturalnej potrzeby mówienia, ale skłaniał ich do wypowiadania się, do zadawania pytań**. W trakcie opisanej działalności uczniowie mają:

  - określać słowami sens gromadzonych doświadczeń i przemyśleń: sprzyja to interioryzowaniu, uwewnętrznianiu procesu uczenia się;
  - formułować pytania do nauczyciela i otrzymywać takie wyjaśnienia, które mogą włączyć do swojego rozumowania na zasadach, jakie opisuje S. Szuman, analizując rolę dziecięcych pytań i udzielanych im odpowiedzi w procesie uczenia się.

Zapewniamy, że uczniowie z ochotą spełniają te oczekiwania, jeżeli mają poczucie, że ich wypowiedzi są oczekiwane i poważnie traktowane. Nauczyciel może – jest to naturalne w procesie uczenia się – skorygować wypowiedź ucznia, jeżeli uczyni to życzliwie. Zapewniamy, że każdy uczeń rozumie sens i potrzebę takiej korekty.

znaleźć ustaleń dotyczących epizodów organizowania wspólnego pola uwagi i działania. Natomiast w publikacjach dotyczących rozwoju umysłowego dzieci (zwłaszcza nowych) coraz częściej wskazuje się na skuteczność edukacyjną epizodów wspólnego zaangażowania (wspólne pole uwagi i działania) i rozszerzania aktywności poznawczych na miarę strefy najbliższego rozwoju, por. H.R. Schaffer, *Rozwój języka w kontekście*, 2002; H.R. Schaffer, *Psychologia dziecka*, 2012, rozdziały 7 i 8.

- W trakcie kierowania procesem tworzenia zarysów pojęć geometrycznych nauczyciel ma skłaniać uczniów do stosowania opanowanych już umiejętności mierzenia długości i posługiwania się liczbami mianowanymi w rachowaniu. Tworzeniu zarysów pojęć geometrycznych sprzyjają też sytuacje zadaniowe wymagające od uczniów sporządzania rysunków geometrycznych (np. kreślenie siatek, rysunki konstrukcji z klocków z podaniem ich realnych wymiarów), a także sporządzanie modeli poznawanych brył z uwzględnieniem ich najważniejszych cech.

Z reguł tych wynika, że uczniowie w miarę samodzielnie tworzą w swoich umysłach intuicje i zarysy pojęć geometrycznych. Nauczyciel im to umożliwia, a potem umiejętnie wspiera ich w działaniu, spostrzeganiu i formułowaniu uogólnień. Dlatego mówimy o *wspomaganiu uczniów w rozwijaniu intuicji i tworzeniu zarysów pojęć geometrycznych*, a nie o szkolnym nauczaniu w wersji podawania gotowej wiedzy z zaleceniem zrozumienia, zapamiętania i zastosowania.

Wspomaganie to przebiega od zaciekawienia uczniów daną bryłą i umożliwienia im manipulacyjnego i ruchowego poznania jej własności, poprzez zachęcanie do wypowiadania się i zadawania pytań, formowania uogólnień, które nauczyciel uzupełnia – jeżeli trzeba – wnioskami, do których uczniowie jeszcze nie mogą samodzielnie dojść. Tak kształtowane intuicje i zarysy pojęć stanowią rodzaj rusztowania koniecznego w budowaniu systemu wiedzy i umiejętności w następnych latach edukacji szkolnej.

Literatura

B o b r o w s k a - N o w a k W.: 1978, *Historia wychowania przedszkolnego*, WSiP, Warszawa.

B r u n e r J.S.: 1978, *Poza dostarczone informacje. Studia z psychologii poznania*, PWN, Warszawa.

D e w e y J.: 1988, *Jak myślimy*, PWN, Warszawa.

D i c k s t e i n S.: 1981, *Początkowa nauka geometryi w zadaniach*, nakład autora, Księgarnia Gebethnera i Wolffa, Warszawa.

G r u s z c z y k - K o l c z y ń s k a E.: 2017, *Ćwierć wieku modernizacji nauczania matematyki. Pedagogiczna analiza sposobów i konsekwencji wprowadzania idei „nowej matematyki" do edukacji matematycznej*, „Matematyczna Edukacja Dzieci. Czasopismo dla nauczycieli i rodziców" nr 2, s. 5–48.

G r u s z c z y k - K o l c z y ń s k a E., K o z i e ł J .: 2017, *Zastosowanie Darów Fröbela w Dziecięcej matematyce. Treści kształcenia, komentarze metodyczne oraz opisy zajęć wspomagających rozwój umysłowy i edukację matematyczną przedszkolaków*, Wydawnictwo Froebel.pl.Sp. z o.o, Lublin.

G r u s z c z y k - K o l c z y ń s k a E., Z i e l i ń s k a E.: 2015, *Dziecięca matematyka – dwadzieścia lat później. Książka dla rodziców i nauczycieli starszych przedszkolaków,* Wydawnictwo CEBP, Warszawa.

G r u s z c z y k - K o l c z y ń s k a E., D o m o r a d z k i S.: 2016, *Kamienie milowe w nauczaniu geometrii dzieci w Polsce od połowy XIX w. do końca XX*, w: 37. Mezinárodní konferencje Historie Matematiky, Poděbrady, (editors) J. Bečvář, M. Bečvářová, Praha, Matfyzpress, s. 115–126.

H e j n ý M.: 1993, *The understanding of geometrical concepts*, w: Proceedings of 3-rd Bratislava International Symposium on Mathematical Education BISME-3, Univerzita Komenského, Bratislava.

H e j n ý M.: 1995, *Development of geometrical concepts,* w: International Symposium on Elementary Math Teaching SEMPT'95, Charles University Faculty of Education, Prague.

H e j n ý M.: 1997, *Rozwój wiedzy matematycznej, Dydaktyka matematyki*, Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego seria 5, 19.

J u r k o w s k i A.: 1975, *Ontogeneza mowy i myślenia*, seria: Biblioteka Psychologiczna, WSiP.

K o t S.: 1930, *Źródła do historji wychowania*, (wybór), Cz. 2, *Od początku w. XVIII do początku w. XX*, Księgarnia Gebethnera i Wolffa, Warszawa.

P i a g e t J.: 2005, *Mowa i myślenie dziecka*, PWN, Warszawa, wyd. 3.

S a n t u c c i H.: 1974, *Graficzna próba organizacji percepcyjnej dla dzieci w wieku od 4 do 6 lat (kopiowanie figur geometrycznych)* (test) w: Zazo R., Galifret-Granjon N., Hurtig M.C., Mathon T., Pècheux M.P., Santucci H., *Metody psychologicznego badania dziecka,* PZWL, Warszawa.

S c h a f f e r H.R.: 2002, *Rozwój języka kontekście*, w: (red). Brzezińska A., Czuba T., Lutomski G., Smykowski B.: 2002, *Dziecko w zabawie i świecie języka*, Wydawnictwo Zysk i S-ka, Poznań.

S c h a f f e r H.R.: 2012, *Psychologia dziecka*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa.

S p i o n e k H.: 1970, *Psychologiczna analiza trudności i niepowodzeń szkolnych*, seria: Biblioteka Nauczyciela, PZWS, Warszawa.

S t a n b a k M.: 1974, *Metody psychologicznego badania dziecka*, PZWL, Warszawa.

S z e m i ń s k a A.: 191, *Rozwój procesu klasyfikacji*, w: (red.) Semadeni Z., *Nauczanie początkowe matematyki. Podręcznik dla nauczyciela,* t. 1, WSiP, Warszawa.

S z u m a n S.: 1955, *Rola działania w rozwoju umysłowym małego dziecka*, seria: *Monografie Pedagogiczne*, Polska Akademia Nauk, Komitet Nauk Pedagogicznych, t. 2, Zakład Narodowy im. Ossolińskich, Wrocław.

S z u m a n S.: 1939, *Rozwój pytań dziecka: badania nad rozwojem umysłowości dziecka na tle jego pytań*, „Nasza Księgarnia", Spółka Akcyjna Związku Nauczycielstwa Polskiego, Warszawa, Wilno, Lublin.

S z u m a n S.: 1985, *Dzieła wybrane*, 1985. tom 1, WSiP, Warszawa.

W y g o t s k i L.S.: 1989, *Mowa i myślenie*, seria: Biblioteka Klasyków Psychologii PWN, Warszawa.

On substantive and methodological errors in introducing children to the world of geometry. Solid geometry – the benefits of shaping intuition and outlines of concepts

Summary

The support for children in creating their intuition and shapes of geometric notions commonly begins with planar geometry. We explain dark sides of such education, which contribute to failures in learning mathematics. They can be avoided if children's education begins with solid geometry. In this article we present major assumptions and methodical solutions of such introduction of children into the world of geometry.