W jaki sposób uczniowie klas początkowych rozmawiają o tym, co ważne i trudne w matematyce

Joanna Zalewska

Akademia Pedagogiki Specjalnej w Warszawie
joannazalewska@aps.edu.pl

Streszczenie

Główną przesłanką do wypowiedzenia się w kwestii rozumienia dziecięcego języka są przeprowadzone badania[1] oraz moja wieloletnia praktyka pedagogiczna.

Jak ważny jest język mówiony w matematyce, mogłam się przekonać, obserwując zmagania uczniów związane z procesem rozwiązywania zadań matematycznych i ich sposób rozmawiania o tym, co trudne i niezrozumiałe.

Jako nauczyciel przez kilkanaście lat partycypowałam w rozwoju myślenia matematycznego swoich uczniów i z uwagą patrzyłam na zachodzące zmiany w ich sposobie ujmowania słowami tego, co było zapisane za pomocą symboli.

Bogate doświadczenia w pracy z dziećmi, osłuchanie się z ich wyrażaniem myśli słowami uczyniło mnie bardziej wrażliwą na ich sposób komunikowania się i przyczyniło się do wnikliwszej analizy języka mówionego badanych uczniów, będącego czymś więcej niż tylko sumą obustronnych słów i gestów.

Tę oryginalność języka i dynamizm dialogu między uczniami podkreślają moim zdaniem stosowane przez nich metafory[2],

[1]W niniejszym artykule przedstawione zostały fragmenty eksperymentów diagnostycznych, jakie przeprowadziła autorka artykułu w ramach przygotowań rozprawy doktorskiej pt. *Strategie intelektualne stosowane przez uczniów klasy trzeciej w rozwiązywaniu zadań matematycznych*, pisanej pod kierunkiem prof. zw. dr hab. E. Gruszczyk-Kolczyńskiej oraz badań zrealizowanych w ramach grantu nr BSTP 16/16 – I w latach 2016/2017 w Akademii Pedagogiki Specjalnej w Warszawie.

[2]Por. M. Kotowska, *Metafora w dysursie edukacyjnym,* „Przegląd Pedagogiczny", nr 1, Wydawnictwo Uniwersytetu Kazimierza Wielkiego, Bydgoszcz 2015, s. 335–344. Metafora, choć jest zaliczana do tropów poetyckich, jest używana nie tylko w tekstach literackich, ale także w języku potocznym. *Podręczny słownik terminów literackich* pod red. Janusza Sławińskiego proponuje następującą definicję metafory: „metafora (¡gr. metaphorá = przeniesienie) – wyrażenie będące niezwykłym użyciem lub połączeniem słów, które w nowych okolicznościach lub związkach zyskują nowe znaczenie, zwane metaforycznym. Powstaje ono zawsze na fundamencie znaczeń dotychczasowych, jako ich przekształcenie, przeniesienie, rozszerzenie, uabstrakcyjnienie itp." Zob. J. Sławiński (red.), *Podręczny słownik terminów literackich*, Wyd. OPEN

symplifikacje[3] oraz charakterystyczne dla mowy potocznej zdania anakolutyczne [4].

W pracy przedstawiam, w jaki sposób uczeń obrazował sytuację zadaniową i jakich używał narzędzi, aby wyjaśnić problem matematyczny młodszemu koledze.

Analizę językową materiału badawczego można potraktować jako cenną obserwację metodyczną, poszerzającą wiedzę na temat komunikowania się społecznego i strategii stosowanych przez uczniów klas trzecich rozwiązujących zadanie matematyczne w parze z uczniem klasy pierwszej.

1. Wstęp

Uniwersalny język matematyki jest podstawą komunikowania się w całym naszym świecie. Za pomocą znaków matematycznych, słów, obrazów opisuje się i wyjaśnia m.in. złożone zjawiska fizyczne, chemiczne, biologiczne, ekonomiczne.

Często mówi się, że język matematyki jest językiem formalnym, nasyconym symbolami i sformułowaniami rzadko używanymi w mowie potocznej.

Rzeczywistość, w której żyjemy, jest żywa i różnorodna, nie statyczna. W takiej też rzeczywistości porusza się uczeń. Proces uczenia się jest dynamiczny i interakcyjny. Angażuje uwagę i całe ciało w sposób zamierzony i niezamierzony.

Dzieci w wieku szkolnym są aktywnymi uczestnikami rozwoju swych umiejętności językowych, a ich mowa, podobnie jak wszystkie inne rzeczy, których się uczą, jest podatna na wzmocnienia. Im bardziej wspierający i werbalnie stymulujący będzie wpływ ich środowiska, tym więcej będą miały bodźców do klarownego i spójnego wyrażania się w języku

Warszawa 2001, s.170.

[3]Przez *symplifikacje* (fr. *simplification*) rozumie się uproszczenie czegoś np.jakiegoś zagadnienia, w sposób, który je czyni zrozumialszym, jednocześnie je spłycając, Zob. *Słownik wyrazów obcych*, PWN, Warszawa1995, s. 1060.

[4]Słowo *anakolut* (gr. *anakolouthon*) oznacza zniekształcenie konstrukcji składniowej powodujące zanik więzi między członami zdania, stosowane czasem jako zabieg stylistyczny; zdanie mające wadliwą konstrukcję składniową. Zdania anakolutyczne bywają wprowadzane celowo, jako środek stylistyczny, do utworów literackich, aby stworzyć wrażenie mowy potocznej Por. *Słownik wyrazów obcych*, op. cit. s. 47; https://encenc.pl/anakolut/.

matematyki. Dlatego tak ważna w całym procesie uczenia się jest ich interakcja ze światem materialnym i społecznym. Otwartość i akceptacja dziecka przez dorosłego, zrozumienie dla jego sposobu komunikowania się i szacunek dla jego niewiedzy jest szansą na to, iż nabierze ono przekonania, że może bez obaw dzielić się wiedzą i wyrażać to samo pojęcie matematyczne w różny sposób. Kompetencje językowe, tak jak i matematyczne nie są jednorodne.

Komunikacja w systemie szkolnym wymaga od dziecka opanowania określonych wzorców mowy i sprawnego operowania nimi. Na poziomie formalnym wymaga się rozumienia i komunikowania się w języku specyficznym dla danej dziedziny. Dlatego też dzieci od początku swojej edukacji domowej lub zinstytucjonalizowanej uczą się nowego języka – języka matematyki[5]. Poznają symbole matematyczne, tak jak litery i inne znaki. Przechodzą kolejne poziomy myślenia[6], poznają pojęcia związane z liczbami, geometrią i rozwijają umiejętności kodowania oraz dekodowania. Przy tym są dociekliwe i ciekawe świata. Za pomocą języka potocznego, nieprecyzyjnego, często niezbornego, wyrażają swoje problemy i emocje, swój punkt widzenia. G. Polya w książce: *Jak to rozwiązać* podkreśla szczególnie naturalność i empatię w interakcjach nauczyciel – uczeń. Według niego najważniejszym zadaniem nauczyciela jest pomaganie swoim uczniom w samodzielnym zdobywaniu wiedzy[7] i werbalizowaniu swoich myśli.

Na poziomie nauczania początkowego odbywa się to głównie na poziomie wzrokowym i opisowym. W rezultacie proces interakcyjnego uczenia się przyczynia się do poszerzenia i uzewnętrznienia części wiedzy indywidualnej ucznia.

L.S. Wygotski[8], prowadząc badania w naturalnym środowisku ucznia, analizował sposoby uczenia się i przekazywania wiedzy. W wielu pu-

[5]M. Skura i M. Lisicki, *Matematyka od przedszkola.Metody i zasady wprowadzania pojęć matematycznych. Przygotowanie do rozumienia liczb i posługiwania się nimi*, Warszawa 2015, s. 18–20.
http://www.bc.ore.edu.pl/Content/760/Matematyka+od+przedszkola_MSkura_MLisicki.pdf.

[6]P.H. van Hiele, *Developing Geometric Thinking through Activities That Begin with Play*, „Teaching Children Mathematics" 6, February 1999, s. 310–316.

[7]G. Polya, *Jak to rozwiązać*, PWN, Warszawa 1993, s. 21.

[8]L.S. Wygotski, *Wybrane prace psychologiczne*, PWN, Warszawa 1971, s. 132–133.

blikacjach silnie akcentował akceptowane kulturowo praktyki, działania i narzędzia, a przede wszystkim język. Jego zdaniem rozwój może dokonywać się w relacji z kimś, kto wie więcej o tych narzędziach, czyli z dorosłym lub bardziej kompetentnym rówieśnikiem.

Zdaniem D. Fontany, formalna edukacja ma obowiązek rozwijania wszystkich obszarów komunikacji językowej, gdyż dziecko podejmujące edukację nie jest jeszcze w pełni kompetentne we wszystkich wymienionych powyżej aspektach i wiele dzieci potrzebuje pomocy w przechodzeniu przez kolejne etapy szkolnej nauki.

Fontana[9] szczególną rolę w kształceniu kompetencji językowych przypisuje nauczycielom. W *Psychologii dla nauczycieli* podkreśla znaczenie nauczania języka i wymienia ściśle ze sobą powiązane kompetencje językowe:

- kompetencję gramatyczną, która pozwala na wyrażanie myśli w odpowiedni, jasny i społecznie aprobowany sposób;
- kompetencję społeczno-lingwistyczną, która umożliwia dziecku prowadzenie rozmowy z różnymi osobami w sposób odpowiedni do statusu i poziomu rozmówcy oraz w zgodności z normami i zasadami obowiązującymi w danej grupie społecznej;
- kompetencję dyskursu, która przejawia się w zdolności łączenia językowych wypowiedzi w sposób ciągły i logiczny, co pomaga w płynnym i zrozumiałym uczestniczeniu w dialogu i maksymalnie zapobiega powstawaniu sprzeczności, błędu;
- kompetencję strategiczną, która pozwala na właściwe wykorzystanie specyficznych mechanizmów, takich jak: metafora, porównanie, intonacja, ton głosu itp.[10]

Do tych czterech komponentów Fontana dodaje jeszcze kompetencję analityczną, która jest wewnętrznym (zinterioryzowanym) językiem ucznia niezbędnym do efektywnego myślenia i rozwiązywania problemów[11].

W moich rozważaniach naukowych analizuję dziecięce strategie stosowane w rozwiązywaniu problemów – zadań matematycznych, kierując

[9] D. Fontana, *Psychologia dla nauczycieli*, Wyd. Zysk i S-ka, Poznań 1998.
[10] Tamże, s. 101–102.
[11] Tamże, s. 102.

się przy tym metodą obserwacji bezpośredniej[12] i myślą Z.I. Kałmykowej[13], że dziecko uczy drugie dziecko, prowadząc je ścieżką swojego umysłu, którą samo przebyło, rozwiązując zadanie.

Z literatury przedmiotu wynika, że aby opisać precyzyjnie językiem matematyki określone zależności, na przykład rozwiązując zadanie, trzeba wykonać ogromny wysiłek umysłowy. Potwierdza to m.in. M. Spitzer, powołując się na doświadczenia geniusza, wybitnego uczonego. W książce *Jak uczy się mózg* napisał:

> Einstein mówił o umysłowym procesie powstawania swoich odkryć, że intuicyjnie ma przed oczami określone zależności i potem wymaga to od niego nierzadko ogromnego wysiłku, by precyzyjnie wyrazić je w języku matematycznym[14].

Na nadmierne trudności w uczeniu się matematyki i ogromny wysiłek intelektualny wskazują również badania E. Gruszczyk-Kolczyńskiej[15], która pisze, że dziecko, rozwiązując zadanie, musi zapoznać się z jego treścią, zrozumieć sens, a potem dokonać analizy tego, co jest dane, a co szukane. Następnie przełożyć to wszystko na język matematyki. Te złożone czynności intelektualne stają się dla dzieci sytuacją nieznośną emocjonalnie, przed jaką niektóre się bronią, stroniąc od działalności matematycznej. Dlatego też uznałam, że zaobserwowane i zarejestrowane rozmowy uczniów rozwiązujących zadanie matematyczne z treścią, w parach bez interwencji nauczyciela, mogą być pomocne w odkrywaniu po raz kolejny roli języka i uczenia się współpracy z innymi.

[12]Metoda obserwacji wzorowana na metodzie zastosowanej przez J. Piageta, która polegała na tym, że dziecko mogło mówić swobodnie bez ingerencji dorosłego i notowano tylko bieg jego myśli. Por. J. Piaget, *Mowa i myślenie u dziecka*, Książnica – Atlas, Lwów-Warszawa, 1929, s. 7.

[13]Z.I. Kałmykowa, *Metodika diagnotiki obuczajemosti szkolnikow: na materiale fizyki. Obuczajemost wprincipy postrojenija metodow jejo diagnostiki*, „Problemy diagnostiki umstwiennowo razwitijauczaszczichsja", 1975.

[14]M. Spitzer, *Jak uczy się mózg,* PWN, Warszawa 2012, s. 189.

[15]E. Gruszczyk-Kolczyńska, *Dzieci ze specyficznymi trudnościami w uczeniu się matematyki. Przyczyny, diagnoza, zajęcia korekcyjno-wyrównawcze*, WSiP, Warszawa 1992, s. 110–112.

2. Matematyka jako język mówiony i „obrazowy”[16]

Język matematyki[17], tak jak każdy współczesny język, ma zarówno formę ustną, jak i pisemną. Istotną funkcją języka mówionego jest opisywanie rzeczywistości, wyrażanie myśli, pojęć, a także przekazywania emocji.

Znaczenie werbalnego i niewerbalnego komunikowania się wzrasta w momencie, kiedy chcemy dostosować swój język do odbiorcy lub kiedy odczuwamy trudność w wyjaśnieniu czegoś nowego, czy skomplikowanego.

R.P. Feynman[18], laureat Nagrody Nobla w dziedzinie fizyki, w swoich wspomnieniach opisał pewien incydent, który miał miejsce w Brazylii. Planując wykład w języku mało znanym odbiorcy, już na samym początku doświadczył trudności w zrozumieniu się ze studentami. Ową „przygodę z komunikacją”, którą warto poddać refleksji, podsumował w niniejszych słowach:

> Z początku zamierzałem wygłaszać wykłady po angielsku, ale zauważyłem pewną rzecz: kiedy studenci tłumaczyli mi coś po portugalsku, niezbyt dobrze ich rozumiałem(...) kiedy zaś oni zmagali się z angielskim, wiedziałem, o co chodzi, mimo że wymowa była okropna, a składnia pogmatwana. Zdałem więc sobie sprawę, że jeżeli mam ich czegoś nauczyć, to lepiej będzie, jeżeli będę mówił kiepską portugalszczyzną. Swój język łatwiej zrozumieją[19].

Z doświadczenia amerykańskiego profesora można wysnuć wniosek, że nauka formalnego języka matematyki jest zbliżona do nauki języka obcego, którym posługujemy się w szkole, podczas gdy w domu mówimy innym językiem, zwykle potocznym.

[16]Por. Z. Semadeni, E. Gruszczyk-Kolczyńska, G. Treliński i inni, *Matematyczna edukacja wczesnoszkolna. Teoria i praktyka*, Wydawnictwo Pedagogiczne ZNP Spółka z o.o., Kielce 2015, s. 36.

[17]Z. Usiskin, *Matematyka jako język*, tłumaczenie oryginału z *Comm unication in Mathematics*, K – 12 and Beyond, NCTM 1996 Yearbook.
http://mathsiedlce.edu.pl/attachments/article/24/020_Usiskin_Z.pdf

[18]R.P. Feynman, *Pan raczy żartować panie Feynman. Przypadki ciekawego człowieka,* Wydawnictwo Znak, Kraków 2018.

[19]Tamże, s. 261.

Jak wiemy, już w pierwszej klasie szkoły podstawowej dzieci zaczynają posługiwać się językiem abstrakcji, symbolu i sformalizowanych pojęć. Takim językiem posługują się też nauczyciele i takim językiem napisane są podręczniki dla uczniów klas początkowych.

Zdaniem H. Freudenthala[20] nadmierny formalizm może być przyczyną blokad w komunikacji i może ograniczać nasze wyobrażenia i wizję matematyczną, a na pewno te ograniczenia w dużym stopniu mogą dotyczyć uczniów będących na poziomie wzrokowym i opisowym.

Naturalny język ucznia na progu edukacji szkolnej jest językiem prostym, pełnym niedomówień i określeń, które są dalekie od języka wymaganego przez nauczyciela. Można by powiedzieć, że jest językiem obrazowym, pełnym nieścisłości, ale „dojrzewającym" do formalnego języka matematyki.

L.S. Wygotski nazwał ten moment rozwojowy „strefą najbliższego rozwoju"[21]. Termin ten oznacza umowny obszar, najbliższy osiągniętemu już poziomowi ontogenetycznemu, i uwzględnia „nie tylko to, co dziecko już osiągnęło, lecz również to, co w nim dojrzewa"[22]. Strefę najbliższego rozwoju dziecka określają zachowania, które nie występują jeszcze spontanicznie, ale które można inicjować, inspirować i wyzwalać, gdyż w jego organizmie dojrzewają już procesy warunkujące te zachowania. Wygotski określa tę strefę, jako „różnicę między poziomem rozwiązywania zadań pod kierunkiem i za pomocą dorosłych a poziomem rozwiązywania zadań dostępnych w samodzielnym działaniu"[23].

Według koncepcji L.S. Wygotskiego[24] nauczanie i uczenie się dziecka zawsze jest zdeterminowane elementami kultury, w jakiej się wychowuje. Wygotski podkreślał, że dziecko w relacji z rówieśnikiem często uczy się więcej niż w relacji z dorosłym.

Edukacja zdaniem J.S. Brunera[25] stanowi podstawowe ucieleśnienie życia w kulturze, a nie tylko przygotowanie do niego. Dzięki wsparciu

[20] H. Freudenthal, *The Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*, Dordrecht, Holland, D. Reidel, 1983.

[21] L.S. Wygotski, *Wybrane prace psychologiczne*, PWN, Warszawa 1971, s. 542.

[22] Tamże, s. 543.

[23] Tamże. s. 543.

[24] H.R. Schaffer, *Dziecko jako praktykant: Wygotskiego społeczno-poznawcza teoria rozwoju*, w: *Psychologia dziecka*, PWN, Warszawa 2014, s. 240.

[25] J.S. Bruner, *Kultura edukacji*, Universitas, Kraków 2006, op. cit., s. 15–29.

innych osób, człowiek uczy się i rozwija swoje kompetencje językowe. Dlatego zdaniem Brunera *zasada interakcyjności* stanowi najważniejszą zasadę w kulturze wzajemnego uczenia się[26]. Bruner pisał, że „każde dziecko, na każdym etapie rozwoju, można uczyć efektywnie każdego przedmiotu, podanego w określonej formie, rzetelnej pod względem intelektualnym"[27]. Twierdził, że (...) „ aktywność umysłowa ma tę samą naturę w pracowniach uczonych i w trzeciej klasie szkoły podstawowej"[28].

Zdaniem D. Fontany[29] czasami dziecko może uzyskać bardziej skuteczną pomoc od rówieśnika niż od osoby dorosłej. Dzieci potrafią np. bardzo precyzyjnie określić trudności swoich kolegów. Aby porozumieć się z nimi, starają się mówić w sposób jak najbardziej przystępny dla partnera i wykorzystują różne narzędzia (środki) werbalne i wizualne.

2.1. Siła języka mówionego i „obrazowego"

Badani uczniowie klasy trzeciej, pełniący w moich eksperymentach rolę *małych nauczycieli*, starali się dostosować swój język do języka *małego ucznia* i uczyli go rozwiązywać zadanie najlepiej, jak potrafią. Kierując procesem rozwiązania zadania, posługiwali się językiem mówionym, który jest żywy i dużo też w nim spontaniczności. Manipulowali przy tym dostępnymi im przedmiotami.

Jak pisałam wcześniej, to dzięki zastosowaniu *metafor*[30] (wyrażeń obrazowych, przybliżeń) możemy trudną rzecz opisać słowami, które

[26] *Kosz, Sukces niejedno ma imię. Metoda projektów jako jedna ze strategii rozwijania poczucia sprawstwa i nabywania kompetencji uczniów do współpracy,* „Forum Dydaktyczne: przeszłość, teraźniejszość, przyszłość", 2012, nr 9–10, s. 98–99

[27] J.S. Bruner, *Poza dostarczone informacje*, PWN, Warszawa 1978, s. 681.

[28] J.S. Bruner, *Proces kształcenia,* PWN, Warszawa 1964, s. 19.

[29] D. Fontana, *Where do we go from here? A personal view by an educationalist*, w: *Children helping children*, (red.) H.C. Foot, M.J. Morgan, R.H. Shute, John Willey & Sons, New York 1990, s. 376. Cyt. za A. Twardowski, *Możliwości wykorzystania rówieśniczego tutoringu w edukacji dzieci z niepełnosprawnością intelektualną*, Interdyscyplinarne Konteksty Pedagogiki Specjalnej, 2014, nr 5, s. 18–39.

[30] Więcej na temat użycia metafory w konstruowaniu wiedzy pisze: M. Szurek, *Wiedza jako algorytm, wiedza jako metafora*, w: *O nauczaniu matematyki. Wykłady dla nauczycieli i studentów,* tom 1, Gdańskie Wydawnictwo Oświatowe, Gdańsk 2005, s. 27–28; J. Bronowski, *The ascent of man*, Faktura McDonald & Co, London & Sydney 1973.

odnoszą się do innej. *Metafora* to także każde zaskakujące zestawienie słów nadające im nowy, świeży sens.[31] *Metafora* jest konstruowana w celu zrozumienia, „oswojenia" rzeczywistości, a zwłaszcza w celu wytłumaczenia odbiorcy istoty zjawisk abstrakcyjnych, (np. uczuć, kategorii) oraz skomplikowanych mechanizmów i działań. Żeby coś zrozumieć lub komuś wyjaśnić nową, nieznaną rzecz, pojęcie, myśl, musimy odwołać się do tego, co stare i znane, do czego można by było to porównać, z czym skojarzyć.

Tu nasuwa się pytanie, dlaczego uczniowie uczący rozwiązywać zadanie matematyczne ucznia klasy pierwszej posługują się *metaforą*, językowym środkiem stylistycznym najczęściej stosowanym w tekstach literackich?

Mianowicie, posługiwanie się przez uczniów w trakcie rozwiązywania zadań matematycznych *metaforą*, czyli *przenośnią*, ma na celu głównie wywołanie określonych skojarzeń związanych z wykorzystywanymi słowami. Żeby dokonać odkrycia, wniknąć w sedno problemu i wyjaśnić innemu uczniowi, uczeń klasy trzeciej opisuje jedną rzecz słowami, które odnoszą się do innej, na przykład w zadaniu „Ścieżka":

> Basia ułożyła na stole 11 kamyków w linii prostej w odległości 3 centymetry jeden od drugiego. Jaka jest odległość, od pierwszego do ostatniego kamyka?[32]

Odległość wyrażoną w centymetrach niektórzy badani uczniowie przedstawili swoim młodszym kolegom za pomocą konkretnych przedmiotów z przyporządkowaniem jeden do jednego[33]. Wyglądało to tak:

> Ola (uczennica klasy III) sięga po kolorowe żetony i mówi: *I pomiędzy każdym kamykiem są trzy centymetry.* Mówi: *Trzy*

[31] Metafora, choć zaliczana do tropów poetyckich, jest używana nie tylko w tekstach literackich, ale także w języku potocznym. Więcej na temat metafory: https://www.bryk.pl/.

[32] Zadanie „Ścieżka" było wzorowane na treści zadania przedstawionego przez D. Klus-Stańską w: D. Klus-Stańska, M. Nowicka, *Sensy i bezsensy w edukacji wczesnoszkolnej*, Harmonia Universalis, Gdańsk 2014, s. 126.

[33] Dla porównania istoty pojęcia liczby i funkcji. Oba pojęcia są podstawowymi pojęciami matematyki. W nauczaniu wprowadza się definicję liczby i funkcji jako przyporządkowanie każdemu elementowi pewnego zbioru dokładnie jednego elementu drugiego zbioru. Samo pojęcie przyporządkowania pozostaje intuicyjne. Por. Z. Semadeni, E. Gruszczyk-Kolczyńska, G. Treliński i inni, *Matematyczna edukacja wczesnoszkolna. Teoria i praktyka*, op. cit., s. 57; http://www.math.edu.pl/

> i układa trzy żetony pomiędzy ułożone wcześniej kolorowe kamyki. Znów mówi: *Trzy* i układa trzy żetony. Ola powtarza tę czynność dziesięć razy.
>
> Hania (uczennica klasy III) mówi: *Teraz musimy zrobić centymetry. Do centymetrów możemy wziąć takie czerwone pionki.* Bierze do ręki kilka czerwonych żetonów i mówi: *Mamy odległość trzy centymetry, więc musimy zrobić trzy pomiędzy tymi.* Wskazuje palcem na odległość od kamyka do kamyka i układa pomiędzy kamykami po trzy żetony[34].

Z analizy materiału badawczego wynika, że uczniowie opisywali jedną rzecz słowami, które odnoszą się do innej. Żeby zobrazować długość i zrozumiale wyjaśnić trzycentymetrową odległość między kamykami posłużyli się *metaforą*, to znaczy, opisali „nowe", trudniejsze pojęcie długości tym, co znane, „stare". W tym przypadku były to trzy czerwone żetony (zbiór trzyelementowy) ilustrujący trzycentymetrową odległość pomiędzy kamykami.

Można przypuszczać, że czynili tak, bo aspekt miarowy liczby naturalnej dotyczy wielkości z fizyki (np. 3 cm) i kształtuje się znacznie później niż aspekt kardynalny liczby[35]. Analizując materiał, dało się jeszcze zauważyć w zapisie języka mówionego zdania błędnie skonstruowane pod względem składniowym i gramatycznym. Takie zniekształcenia konstrukcji składniowej, powodujące zanik więzi między członami zdania, są charakterystyczne dla mowy potocznej i dla zdań tzw. *anakolutycznych.*

Dla zobrazowania sytuacji zadaniowej uczniowie używali słów, które często narzucały sposób gestykulacji, a innym razem gesty wyzwalały słowa i je kształtowały. Wyglądało to tak:

> Hania (uczennica klasy III) ... *teraz... musimy dziesięć razy policzyć te trójeczki, żeby nam wyszło ile centy... , żeby nam wyszły centymetry, ... więc musimy tutaj napisać. I na koniec, jaki musimy zrobić znak, aby... aby, aby dojść do wyniku...*

[34] Przytoczone fragmenty pochodzą z zarejestrowanych eksperymentów diagnostycznych – badania własne.

[35] Z. Semadeni, E. Gruszczyk-Kolczyńska, G. Treliński i inni, *Matematyczna edukacja wczesnoszkolna. Teoria i praktyka*, op. cit. s. 59.

> Antek (uczeń klasy III) ... *zobacz*, pokazuje pięć kolejnych klocków, dotykając każdego, *masz pięć i to będzie już*, głośno liczy: *sześć*, chwila zawahania, *trzy..., dziewięć, dwanaście, piętnaście centymetrów i to jest pięć kamyków, a ona ułożyła jedenaście kamyków, to jeśli ma piętnaście centymetrów, to potem będzie miała?* Antek liczy w pamięci, widoczny ruch głową wskazujący kolejny klocek, przy każdej wypowiedzianej liczbie... *osiemnaście, dwadzieścia jeden, dwadzieścia cztery, dwadzieścia siedem, trzydzieści i trzydzieści jeden,* chwila zastanowienia... *nie trzydzieści trzy centymetry.*
>
> Jaś (uczeń klasy I) ... *teraz jakby policz, ile jest jakby tych odległości trzy centymetry, czyli ile jest tych połączeń*, pokazuje palcem odległość od pierwszego klocka do drugiego i tak kolejne, kiwa głową i mówi: *połączeń... można tak to określić*[36].

Anakoluty[37] należą do najczęstszych błędów językowych, szczególnie w języku mówionym i potocznym.Przyczyną ich powstawania jest przede wszystkim nieuwaga, roztargnienie i pośpiech. Niekiedy anakolut stanowi wyraz bardzo znacznego natężenia emocjonalnego, co potwierdzałoby, że rozwiązywaniu zadań towarzyszą napięcia natury emocjonalnej[38].

Zdaniem E. Gruszczyk-Kolczyńskiej[39] dziecko ucząc się matematyki, napotyka na trudności, lecz niezmiernie ważne jest, aby potrafiło je w miarę samodzielnie pokonać. Rozwiązywanie zadań jest trudnością i takie trudności zwyczajne przeżywają wszystkie dzieci w trakcie uczenia się matematyki. Jest jednak w szkole spora grupa uczniów, którzy mimo wysiłku nie potrafią poradzić sobie nawet z łatwymi zadaniami. Nie rozumieją ich matematycznego sensu i nie dostrzegają zależności

[36] Przytoczone fragmenty pochodzą z zarejestrowanych eksperymentów diagnostycznych – badania własne.

[37] Por. https://encenc.pl/anakolut/.

[38] Por. E. Gruszczyk-Kolczyńska, *Niepowodzenia w uczeniu się matematyki u dzieci z klas początkowych. Diagnoza i terapia,* Prace Naukowe Uniwersytetu Śląskiego, nr 553, Katowice 1985a; E. Gruszczyk-Kolczyńska, *Przyczyny niepowodzeń w uczeniu się matematyki u dzieci z klas początkowych,* „Psychologia Wychowawcza", nr 2, 1987b.

[39] E. Gruszczyk-Kolczyńska, *Dzieci ze specyficznymi trudnościami w nauce matematyki...* s. 110–111.

pomiędzy liczbami. Bywa, że nie potrafią wytrzymać napięć, które zawsze towarzyszą rozwiązywaniu zadań, z powodu swej niskiej odporności emocjonalnej. Narysowanie grafu, tabelki, a nawet czytelne zapisanie działania może być zbyt trudne, jeżeli dziecko ma obniżoną sprawność manualną.

Większość uczniów pełniących rolę *małych nauczycieli* potrafiło z gestów i słów *małego ucznia* odczytywać, jakie jest jego położenie i rozumieć, co się dzieje w jego umyśle.

Szczególnie było to widoczne w momentach, kiedy pierwszoklasista tylko w sposób niewerbalny wyrażał swój niepokój i zagubienie. Trzecioklasista, widząc, że *mały uczeń* nie do końca rozumie, co on robi, nie zniechęcił się, a wręcz przeciwnie, wykazał się dużą cierpliwością i zastosował *symplifikację*. Kilka razy zmieniał sposoby wizualizowania zadania, a na koniec drastycznie uprościł działanie, minimalizując liczbę jabłek. Czynił to w następujący sposób:

> Adam (uczeń klasy III) spośród leżących na stole pomocy wybrał klocki, odliczył potrzebną mu liczbę i okalając je gestem, zakreślił pętle, a potem zwrócił się do Weroniki, mówiąc: *Tu mamy sześć. Tutaj mamy czternaście. Jak przełożymy jedno jabłko tu*, wskazuje palcem miejsce na stole i przekłada jeden klocek, *to tu będzie siedem, a tu trzynaście*, znowu wskazuje palcem miejsce na stole.
>
> Weronika (uczennica klasy I) ... w tym czasie słucha uważnie. Jej wzrok „śledzi" ruchy Adama, widać na twarzy skoncentrowanie na tym, co robi chłopiec, jak przesuwa, przekłada klocki, manipuluje dostępnymi przedmiotami.
>
> Adam przestaje przesuwać przedmioty, podnosi głowę, patrzy na Weronikę. Po chwili pyta: *To ile trzeba przełożyć jabłek, żeby było równo tu i tu?* Weronika milczy.
>
> Adam bierze kartkę i ilustruje zadanie na kartce, dokładnie objaśniając, co robi.
>
> Adam wykonuje na kartce rysunek pomocniczy: rysuje dwa kosze, w jednym rysuje sześć kółek, a w drugim czternaście i mówi: *Sześć jabłek i czternaście, i ma ci wyjść taka sama*

liczba jabłek w tym i w tym koszu – wskazuje palcem na kartce najpierw jeden kosz, a potem drugi.

Adam znowu podnosi głowę, patrzy na Weronikę, chwilę czeka i mówi: *Czyli ile możesz przełożyć jabłek, żeby tutaj było tyle samo i tutaj?*– gestem dłoni pokazuje na ułożone klocki w pętlach. Weronika patrzy, śledzi ruch ręki, ale nic nie mówi.

Adam wraca znów do rysunku na kartce, rysuje strzałkę i mówi: *Na przykład przełożysz jeden* – gestem symuluje ruch przenoszenia jabłka (narysowanego kółka) z jednego kosza do drugiego. Zerka na Weronikę i mówi: *Tutaj będzie siedem*, dorysowuje kółko, skreśla liczbę 6 i u góry pisze 7, a tu – ręką wskazuje na kosz, z którego jabłko (kółko) przełożył, *tego już nie będzie*, skreśla 4, u góry pisze 3, *bo będzie trzynaście... więc jak przełożysz dwa albo trzy albo cztery albo pięć albo sześć...*

Adam bardzo szybko wymienia liczby, nie rysuje już strzałek, tylko gestem symuluje przenoszenie jabłek z jednego kosza do drugiego. Cały czas zerka na Weronikę, sprawdza czy rozumie to, co on mówi.

Weronika słucha, patrzy z zainteresowaniem na rysunek, wytęża wzrok, nachyla się coraz bardziej do przodu. Adam obserwuje dziewczynkę, zawiesza głos, raz patrzy na Weronikę, raz na rysunek, zastanawia się i po chwili znowu zaczyna tłumaczyć. Teraz zapisuje na kartce, niżej pod rysunkiem, 2 i 4 i mówi: *Jak masz dwa jabłka i masz cztery, to jak jedno jabłko przełożysz tu*, rysuje strzałkę od cyfry 4 do cyfry 2, *to tutaj będą trzy*, nie skreśla 4 i 2, tylko u góry pisze 3, *czyli ile musisz przełożyć stąd*? Ręką wskazuje na narysowany kosz, w którym jest więcej jabłek, *żeby tutaj było po równo*, ręką wskazuje na drugi narysowany kosz, w którym jest mniej jabłek, zawiesza głos, czeka...[40]

[40] Przytoczony fragment pochodzi z zarejestrowanych eksperymentów diagnostycznych – badania własne.

Ta sytuacja pozwoliła małemu nauczycielowi nie tylko na przekształcenie zadania statycznego w dynamiczną scenkę, ale również na przekonstruowanie języka, akcentowanie i podkreślanie tego, co uznał za ważne. Dzięki temu, że mógł samodzielnie dysponować czasem i swobodnie posługiwać się językiem matematyki, inicjował pewne procesy i stosował własne strategie rozwiązania zadania.

3. Podsumowanie

Analiza zebranych i wyżej opisanych przykładów pokazuje, iż język uczniów klas początkowych jest językiem nieprecyzyjnym, zwierającym wiele różnych określeń, których nie znajdziemy w formalnym języku matematyki. W celu zrozumienia rzeczy nowych, nieznanych stosują różne środki, m.in. *metafory, symplifikacje* czy *zdania anakolutyczne.*

Język jest narzędziem, który łączy i buduje klimat porozumienia, a strategie komunikacyjne stosowane przez uczniów potwierdzają, że rozwiązywanie zadań i wstępne matematyzowanie wymaga od nich dużego wysiłku intelektualnego.

Być może poznanie siły języka mówionego i „obrazowego" oraz środków, którymi posługuje się uczeń w procesie rozwiązywania zadań, pomoże wielu osobom zajmującym się uczeniem matematyki zrozumieć swoich uczniów. Warto zdać sobie sprawę z tego, że jeżeli mamy ich czegoś nauczyć, to lepiej będzie, jeżeli będziemy mówić do nich językiem matematyki dostosowanym do ich sposobu myślenia i pozwolimy im na swobodną formę ich ekspresji. Wówczas nie tylko matematyka stanie się przyjemna, ale będzie to krok w rozumowaniu, które *może uczniowi samodzielnie przyjść na myśl*[41].

Powszechne przekonanie o tym, że matematyka jest trudna, a jej rozumienie jest zastrzeżone tylko dla wybranych, powoduje, iż część dzieci doznających porażek na samym początku nauki szkolnej klasyfikuje się do tzw. umysłów niematematycznych.

Z czasem te osoby określane jako „myślące inaczej", niepodporządkowujące się sztywnym regułom matematycznym, na ich szczęście, nazwa się „humanistami". Bo dzięki temu mogą myśleć o sobie, że jednak coś potrafią. Tezę o tym, że nie jest to pojedynczy przypadek, a głębszy

[41] Por. G. Polya, *Jak to rozwiązać*, op. cit., s. 21.

problem, uwiarygodniają pojawiające się na rynku tytuły książek, m.in. książka M. Szurka *Matematyka dla humanistów*[42]. Tytułem książki autor – znany popularyzator matematyki – zachęca do przyjrzenia się jej z innego niż zazwyczaj punktu widzenia, w kontekście otaczającego nas świata, jako części naszej kultury, a język niewątpliwie do niej należy.

Reasumując swoją analizę, zacytuję słowa Horacego[43], „iż żmudne wygładzanie poezji może zniechęcić poetę".

Literatura

B r u n e r J.S.: 2006, *Kultura edukacji*, Universitas, Kraków.

B r u n e r J.S.: 1978, *Poza dostarczone informacje*, PWN, Warszawa.

B r u n e r J.S.: 1964, *Proces kształcenia*, PWN, Warszawa.

F e y n m a n R.P.: 2018, *Pan raczy żartować, panie Feynman! Przypadki ciekawego człowieka*, Wydawnictwo Znak, Kraków.

F o n t a n a D.: 1998, *Psychologia dla nauczycieli*, Wydawnictwo Zysk i S-ka, Poznań.

F r e u d e n t h a l H.: 1983, *The Didactical Phenomenology of Mathematical Structures,* Dordrecht, Holland, D. Reidel.

G r u s z c z y k - K o l c z y ń s k a E.: 1985a, *Niepowodzenia w uczeniu się matematyki u dzieci z klas początkowych. Diagnoza i terapia*, Prace Naukowe Uniwersytetu Śląskiego, nr 553, Katowice.

G r u s z c z y k - K o l c z y ń s k a E.: 1987b, *Przyczyny niepowodzeń w uczeniu się matematyki u dzieci z klas początkowych,* „Psychologia Wychowawcza", nr 2.

G r u s z c z y k - K o l c z y ń s k a E.: 1992, *Dzieci ze specyficznymi trudnościami w uczeniu się matematyki. Przyczyny, diagnoza, zajęcia korekcyjno-wyrównawcze*, WSiP, Warszawa.

[42] M. Szurek, *Matematyka dla humanistów*, Wydawnictwo RTW, 2000.

[43] Cyt. za F. Lombardi, *Bóg szuka nas na marginesie*, Wydawnictwo Znak, Kraków 2017, s. 13.

K a ł m y k o w a Z.I.: 1975, *Metodika diagnotiki obuczajemosti szkolnikow: na materiale fizyki. Obuczajemost principy postrojenija metodow jejo diagnostiki*, „Problemy diagnostiki umstwiennowo razwitijaw uczaszczichsja".

K l u s - S t a ń s k a D., N o w i c k a M.: 2014, *Sensy i bezsensy w edukacji wczesnoszkolnej*, Harmonia Universalis, Gdańsk.

K o s z J.: 2012, S*ukces niejedno ma imię. Metoda projektów jako jedna ze strategii rozwijania poczucia sprawstwa i nabywania kompetencji uczniów do współpracy*, „Forum Dydaktyczne: przeszłość, teraźniejszość, przyszłość", nr 9–10, s. 97–116.

K o t o w s k a M.: 2015, *Metafora w dyskursie edukacyjnym,* „Przegląd Pedagogiczny", nr 1, Wyd. Uniwersytetu Kazimierza Wielkiego, Bydgoszcz, s. 335–344.

L o m b a r d i F.: 2017, *Bóg szuka nas na marginesie*, Wydawnictwo Znak, Kraków.

P i a g e t J.: 1929, *Mowa i myślenie u dziecka*, Książnica-Atlas, Lwów-Warszawa.

P i a g e t J., I n h e l d e r B.: 1999, *Psychologia dziecka*, Siedmioróg, Wrocław.

P o l y a G.: 1993, *Jak to rozwiązać*, PWN, Warszawa.

S e m a d e n i Z., G r u s z c z y k - K o l c z y ń s k a E., T r e l i ń s k i G. i inni: 2015, *Matematyczna edukacja wczesnoszkolna. Teoria i praktyka*, Wydawnictwo Pedagogiczne ZNP Spółka z o.o., Kielce.

S k u r a M.& L i s i c k i M.: 2015, *Matematyka od przedszkola. Metody i zasady wprowadzania pojęć matematycznych.Przygotowanie do rozumienia liczb i posługiwania się nimi*, Warszawa. http://www.bc.ore.edu.pl/Content/760/Matematyka+od+przedszkola_MSkura_MLisicki.pdf.

S p i t z e r M.: 2012, *Jak uczy się mózg*, PWN, Warszawa.

S c h a f f e r H.R.: 2014, *Psychologia dziecka*, PWN, Warszawa.

S z u r e k M.: 2005, *O nauczaniu matematyki. Wykłady dla nauczycieli i studentów*, tom 1, Gdańskie Wydawnictwo Oświatowe, Gdańsk.

S z u r e k M.: 2000, *Matematyka dla humanistów,* Wydawnictwo RTW, Warszawa.

U s i s k i n Z.: 1996, *Matematyka jako język*, tłumaczenie oryginału z *Communication in Mathematics*, K – 12 and Beyond, NCTM, Yearbook.
http://mathsiedlce.edu.pl/attachments/article/24/020_Usiskin_Z.pdf

van H i e l e P.H.: 1999, *Developing Geometric Thinking through Activities That Begin with Play*, „Teaching Children Mathematics" 6.

W y g o t s k i L.S.: 1971, *Wybrane prace psychologiczne*, PWN, Warszawa.

How do primary school students talk about what is important and difficult in mathematics

Summary

The main motivation to talk about understanding children's language is the research I have done and many years of my pedagogical practice.

I could see the importance of the spoken language in mathematics by observing the students' struggles. These were related to learning how to solve mathematical problems and the way they communicated about what is difficult and incomprehensible.

As a teacher, I participated in the development of mathematical thinking of my students for several years and carefully looked at the changes taking place in their way of expressing what was symbolic.

My extensive experience in working with children and listening to the language of students, made me more sensitive to their way of communicating and contributed to a more thorough analysis of the spoken language of the surveyed students, which is more than just the sum of exchanged words and gestures.

This originality of the language and the dynamism of the dialogue between students, in my opinion, are emphasized by the metaphors they use: the simplifications and anacoluthic sentences characteristic of colloquial speech.

In my work I present how the student depicted the task situation and what tools he used to explain the mathematical problem to his younger colleague.

The linguistic analysis of the research material can be treated as a valuable methodological observation. It allows us to expand the knowledge about social communication and strategies used by third graders in solving a mathematical task in tandem with a first grade student.