Wybrane zagadnienia dotyczące kształtowania umiejętności mnożenia i dzielenia

Monika Czajkowska

Uniwersytet Jana Kochanowskiego w Kielcach
monika.czajkowska@ujk.edu.pl

Streszczenie

Badania edukacyjne, obserwacje praktyki szkolnej oraz dyskusje podejmowane w przestrzeni publicznej pokazują, że wiele osób – dzieci, młodzieży i dorosłych, ma niedostatecznie opanowane sprawności rachunkowe. W szczególności wiele trudności sprawia wykonywanie mnożenia i dzielenia w coraz szerszych zbiorach liczbowych. Przyczyn takiej sytuacji można upatrywać w niewłaściwej metodyce. W artykule pokazuję jak, w kontekście ciągłości edukacyjnej, kształtowane są umiejętności mnożenia i dzielenia oraz jakie błędy popełniane są w tym zakresie.

1. Wstęp

Przyczynkiem do napisania tego tekstu stały się szeroko komentowane w przestrzeni publicznej trudności uczniów z tabliczką mnożenia. Brak odpowiednich sprawności w zakresie wykonywania mnożenia i dzielenia potwierdzają badania edukacyjne oraz wstępne wyniki prowadzonych przeze badań dotyczących stosunku studentów do matematyki i uczenia się tego przedmiotu. Na przykład badanie OBUT 2014 wykazało, że około 20% uczniów kończących III klasę szkoły podstawowej ma duże trudności z wykonywaniem czterech podstawowych działań matematycznych (Raport, 2014, s. 11–13). Podobne wyniki uzyskano w kolejnych edycjach badania Omnibus. Na przykład w edycji 2021 tego badania wskaźnik trudności zadań z obszaru sprawności rachunkowe, obejmującego wykonywanie czterech podstawowych działań wyniósł 0,67 (Czajkowska i Hartman, 2021, s. 19), a w edycji 2022 – 0,76 (Czajkowska i Maciejewska -Dzido, 2022, s. 19). Drugim z powodów były prowadzone w internecie ożywione i burzliwe dyskusje na temat poprawności rozwiązania i oceny kilku zadań dotyczących mnożenia i dzielenia. Pierwsze z nich dotyczyło pewnego zadania z klasy II szkoły podstawowej, kolejne – zadania ze szkoły ponadpodstawowej.

W pierwszym przypadku chodziło o to, aby dziecko zapisało działanie opisujące sytuację przedstawioną na poniższym rysunku (rys. 1).

Rys. 1

Pojawiła się tu wątpliwość, czy zapis: $4 : 2 = 8$ opisuje przedstawioną sytuację, czy nie.

W drugim zadaniu zastanawiano się, jaki jest poprawny wynik działania: $36 : 2\sqrt{3}$.

Zanim jednak przejdę do prezentacji swojego stanowiska w sprawie poprawności rozwiązań powyżej przedstawionych zadań, przedstawię na podstawie literatury i własnych badań, jak kształtowane są umiejętności mnożenia i dzielenia począwszy od okresu przedszkolnego aż po szkołę średnią.

2. Kształtowanie umiejętności mnożenia i dzielenia

2.1. Intuicje dzieci przedszkolnych związane z mnożeniem i dzieleniem

Edyta Gruszczyk-Kolczyńska ustaliła, że intuicje dziecka związane z mnożeniem i dzieleniem kształtują się już w okresie przedszkolnym (2015, s. 76, 2021, s. 77). Z moich obserwacji wynika, że często intuicje te są bardzo silnie związane z poczuciem sprawiedliwości. Dziecko pięcioletnie, a czasami nawet czteroletnie, potrafi, wykonując odpowiednie czynności na konkretnych przedmiotach, bezbłędnie określić, np. ile kredek należy wybrać z pudełka, aby każde z trójki dzieci miało po dwie kredki. Na przykład pięcioletni Maksym zrobił to w następujący sposób. Wziął z pudełka dwie kredki w rączkę, odłożył na bok mówiąc przy tym „dla mnie” , wziął kolejne dwie, znowu odłożył na bok i powiedział „dla Milana”, wybrał kolejne dwie odłożył na bok i powiedział „dla Wojtka”, po czym zamknął pudełko. Po wykonaniu tych czynności, i usłyszeniu pytania o liczbę wyjętych kredek, przeliczył wyjęte kredki i stwierdził, że jest ich 6. Podobnie postępowały inne dzieci. W przypadku dzieci mających trudności z liczeniem, zdarzało się, że po wyjęciu odpowiedniej liczby kredek, podawały niewłaściwą ich łączną liczbę (co było głównie wynikiem braku umiejętności przeliczania obiektów) lub mówiły „tyle” i gestem wskazywały na położone z boku kredki. Z moich obserwacji wynika też, że dzieci często dokonywały kontroli poprawności wykonania opisanych czynności, np. sprawdzały, czy za każdym razem wyjęły z pudełka po dwie kredki lub po zamknięciu pudełka sprawdzały, czy w każdej gromadce są dwie kredki.

Dziecko przedszkolne potrafi też rozdzielić „po równo" np. 6 cukierków miedzy trzy osoby, czy 8 klocków między dwoje dzieci. Ważne jest tutaj to, że po każdym takim rozdaniu dziecko zazwyczaj sprawdza, czy faktycznie każdy dostał po tyle samo. Zaobserwowałam też, że u dzieci przedszkolnych istnieją pewne intuicje związane z dzieleniem z resztą. Oto przykład. Trójka dzieci w wielu przedszkolnym (pięciolatek i dwóch czterolatków) dosłała w opakowaniu 10 baloników. Pięcioletni Maksym postanowił podzielić je między uczestników zabawy. Rozdzielał baloniki po jednym (kolegom dawał do rączki, a swoje kładł obok siebie), aż do wyczerpania baloników. Następnie sprawdził, czy każdy otrzymał po tyle samo. Bez większego problemu zauważył, że jedno z dzieci ma o jeden balonik więcej, więc go odebrał i schował z powrotem do torebki. Ponownie sprawdził, czy każdy ma tyle samo baloników i zadowoleniem stwierdził, że „każdy ma trzy, a ten (gestem wskazał na balonik włożony do torebki) będzie dla tego, komu pęknie balonik".

Warto tutaj zauważyć, że intuicje mnożenia i dzielenia w okresie przedszkolnym kształtują się analogicznie, jak intuicje dodawania i odejmowania, chociaż występują jako odrębne umiejętności (Gruszczyk-Kolczyńska, 2015, s. 77). Podobnie jak dodawanie i odejmowanie, tak i mnożenie i dzielenie, jest ściśle powiązane z czynnościami wykonywanymi na realnych przedmiotach i z ich przeliczaniem.

Z powyższych rozważań wynika, że intuicje dzieci związane z mnożeniem i dzieleniem powinny być w okresie przedszkolnym rozwijane i doskonalone tak samo, jak inne umiejętności matematyczne. Warto stosować gry i zabawy w których dzieci będą ustalać wynik mnożenia („tyle razy po tyle samo") lub dzielenia w aspekcie mieszczenia („po kilka") i w aspekcie podziału na równe części („na kilka równych części"). Wiele takich gier i zabaw dydaktycznych można znaleźć w książkach Gruszczyk-Kolczyńskiej.

2.2. Kształtowanie umiejętności mnożenia i dzielenia liczb naturalnych w klasach I-III szkoły podstawowej

Ponieważ intuicje mnożenia i dzielenia rozwijają się już w okresie przedszkolnym, powinny być doskonalone i rozwijane począwszy od pierwszej klasy szkoły podstawowej. Warto tu zauważyć, że w klasie pierwszej dzieci uczą się kodowania czynności wykonywanych na realnych przedmiotach, czyli ich zapisywania za pomocą odpowiednich formuł matematycznych z użyciem liczb i znaków działań. A zatem już w tym okresie powinny pojawić się zapisy typu: $3 \cdot 2$, $6 : 3$. Np. nauczyciel może rozdać dzieciom pudełka z kamyczkami i poprosić, aby dzieci wyjęły z pudełka trzy razy po dwa kamyczki, jednocześnie zapisując na tablicy odpowiednie działanie. Należy tu zauważyć, że skoro te zapisy mają być zakodowanymi czynnościami wykonywanymi na realnych przedmiotach, to zapisy: $3 \cdot 2$ i $2 \cdot 3$ oznaczają wykonanie innych czynności i dla pierwszoklasistów nie jest ani jasne, ani zrozumiałe to, że mnożenie jest przemienne. Zapis $3 \cdot 2$ oznacza bowiem, że np. należy wyjąć z pudełka trzy razy po dwa kamyczki, a zapis $2 \cdot 3$, że należy wyjąć z pudełka dwa razy po trzy kamyczki. Oczywiście, pierwszoklasista jest w stanie ustalić, że i w pierwszym, i w drugim przypadku zostanie wyjęta taka sama liczba kamyczków. Jednak w tym okresie myślenie dziecka jest jeszcze silnie związane z konkretem i wykonywanymi czynnościami, a te są inne. Jak piszą Nawolska i Żądło do sytuacji, w której są 4 rowery, z których każdy ma po 2 koła pasuje iloczyn $4 \cdot 2$, a zapis $2 \cdot 4$ nie jest odpowiedni do tej sytuacji. Iloczyn $2 \cdot 4$ opisuje przypadek, w którym zliczamy koła w dwóch samochodach, z których każdy ma 4 koła. W konkretnych, realnych sytuacjach, rola czynników m i k i w iloczynie jest inna; w iloczynie $m \cdot k$ mamy m razy po k sztuk, w iloczynie $k \cdot m$ mamy k razy po m sztuk (Nawolska i Żądło, 2006, s. 264). Dlatego przy wprowadzaniu zapisu mnożenia, może warto, podobnie jak to czyniono dawniej, posługiwać się terminami: mnożna i mnożnik. Mnożna jest to liczba występująca przed znakiem mnożenia i oznacza „ile razy" (np. ile razy wyjmujemy kamyczki z pudełka). Mnożnik jest to liczba występująca po znaku mnożenia i oznacza „po ile" (np. po ile kamyczków wyjmujemy z pudełka). Powyższe rozwiązania metodyczne, pozwalają też w prosty sposób ustalić sens zapisów typu $1 \cdot 5$ i $5 \cdot 1$. W pierwszym przypadku jeden raz sięgamy do pudełka i wyjmujemy z niego od razu 5 kamyczków, w drugim – sięgamy do pudełka 5 razy i za każdym razem wyjmujemy z niego po jednym kamyczku.

Gdy dzieci poznają już liczbę zero warto wykonać z nimi ćwiczenie, które pozwoli im utrwalić to, czego się już nauczyły i zrozumieć sens działań, w których mnożnik jest równy zero. Na przykład najpierw nauczyciel może prosić dzieci, aby rozłożyły na trzech talerzach po 4 kamyczki, policzyły, ile jest łącznie kamyczków na tych talerzach i zapisały odpowiednią formułę ($3 \cdot 4 = 12$). Następnie prosić, aby dzieci rozłożyły na trzech talerzach kolejno po 3 kamyczki, po 2 kamyczki i po jednym kamyczku. Wykonywanym czynnościom powinno towarzyszyć pojawianie się zapisów: $3 \cdot\ 3 = 9$, $3 \cdot 2 = 6$, $3 \cdot 1 = 3$. Natomiast sytuacji gdy są trzy puste talarze (na żadnym nie ma kamyczka) odpowiada formuła $3 \cdot 0 = 0$. Na tym etapie nie należy dążyć do wprowadzenia zapisu typu $0 \cdot 3 = 0$, gdyż odniesienie go do sytuacji „tyle po tyle" jest trudne lub wręcz niemożliwe.

W pierwszej klasie należy również uczyć dzieci kodowania czynności związanych z rozdzielaniem przedmiotów. Należy stwarzać sytuacje, w których dzieci będą zarówno dzieliły „po tyle" jak i „na tyle". Należy zwracać baczną uwagę na sfomułowania: „podziel po. . . " i „podziel na. . . ". Jeśli nauczyciel będzie chciał rozwijać umiejętności dzielenia w aspekcie mieszczenia („po tyle") powinien sformułować problem np. następująco: „Podziel 24 kamyczki na gromadki, tak aby w każdej gromadce było po 4 kamyczki. Ile będzie gromadek?" Uczeń powinien odliczać kamyczki po 4 i je odsuwać na bok, tworząc w ten sposób gromadki. Następnie powinien ustalić liczbę gromadek. Towarzysząca temu formuła matematyczna powinna być następująca: $24 : 4 = 6$. Jeśli nauczyciel będzie chciał rozwijać umiejętności dzielenia w aspekcie podziału na równe części („na tyle") powinien sformułować problem np. w postaci: „Podziel 24 kamyczki na 6 gromadek, tak aby w każdej gromadce było po tyle samo kamyczków. Ile kamyczków będzie w jednej gromadce?" Uczeń powinien rozdzielać kamyczki po jednym na 6 gromadek, a potem sprawdzić, czy w każdej gromadce jest tyle samo kamyczków i ile ich jest, a następnie zapisać formułę: $24 : 6 = 4$.

Warto tu zauważyć, że w obu przypadkach sytuacja wyjściowa i końcowa są takie same, jednak postawiony problem, działania uczniów i odpowiadające im formuły matematyczne są różne. W tym czasie można też zacząć używać terminów: dzielna (liczba przed znakiem dzielenia), dzielnik (liczba za znakiem dzielenia) i iloraz (wynik dzielenia). Dopiero w kolejnych latach nauki, gdy uczniowie zrozumieją sens dzielenia w obu aspektach, gdy już będą wykonywać działania na abstrakcyjnych liczbach, w oderwaniu od manipulacji na realnych przedmiotach, będzie można wprowadzić dzielenie „przez", np. „30 podzielić przez 5, to 6".

Zdaniem Gruszczyk-Kolczyńskiej, aby uświadomić uczniom regularności uporządkowanych iloczynów warto wykorzystać wypróbowany, choć obecnie rzadko stosowany zapis iloczynów „w słupkach", przy czym kolejne „słupki" powinny pojawiać się jako efekt zakodowania czynności wykonywanych na konkretach. Słupki mogą też być wstępem do stworzenia tabliczki mnożenia. Warto tu zauważyć, że każde dziecko powinno samodzielnie zbudować tabliczkę mnożenia. W pierwszej kolumnie i w pierwszym wierszu tabliczki uczniowie powinni umieścić liczby od 1 do 10, przy czym liczby wpisane w pierwszej kolumnie tabliczki będą mnożnymi, a w pierwszym wierszu – mnożnikami. Warto oferować uczniom różnorodne ćwiczenia ukierunkowane na naukę posługiwania się tabliczką mnożenia. W efekcie tych działań uczniowie powinni zauważyć, że mnożenie i dzielenie są działaniami wzajemnie odwrotnymi oraz że mnożenie jest przemienne (bez wprowadzania tego terminu). W dostrzeżeniu tej ostatniej własności mnożenia pomocne może być też ułożenie obiektów w szyku szeregowo – kolumnowym. Warto aby uczniowie układali np. 4 rzędy po 5 kamyczków w każdym, a następnie nie ruszając ich zmieniali miejsce obserwacji i perspektywę patrzenia (5 rzędów po 4 kamyczki w każdym). Innymi zadaniami, które mogą pomóc w dostrzeżeniu przemienności mnożenia mogą być zadania z budową prostokątów na geoplanie lub zadania z rysowaniem ich na sieci kwadratowej (kartce w kratkę) i ustalanie, ile kwadracików mieści się w tym prostokącie.

Dopiero po zauważeniu i zrozumieniu przez dzieci sensu przemienności mnożenia oraz oderwaniu zapisu iloczynu od wykonywanych czynności na konkretach można wprowadzić pojęcia: czynnik i iloczyn. Wtedy też można uświadomić dzieciom, że jeżeli jeden z czynników jest równy 0, to iloczyn też jest równy 0, a dobierając odpowiednie przykłady i wykorzystując związek między mnożeniem i dzieleniem pokazać, że np. $0 : 6 = 0$, zaś dzielenie przez zero jest niewykonalne.

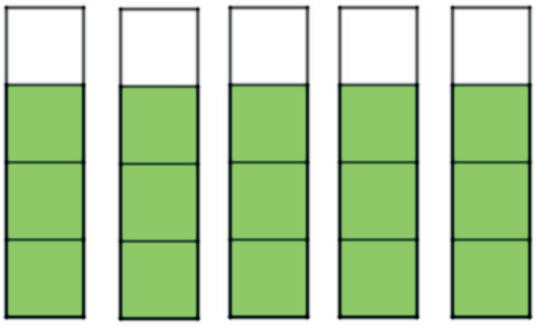
Podsumowując ten etap należy jeszcze zwrócić uwagę na kilka rzeczy. Po pierwsze kształtowanie umiejętności mnożenia i dzielenia oraz rozumienia sensu tych działań jest ściśle związane z wykonywaniem działań na konkretach, wykonywaniem odpowiednich gestów, ruchów. Uczeń musi manipulować, a formuły matematyczne powinny stanowić kod tych czynności. Tu nie wystarczą jedynie statyczne rysunki, na które dziecko może patrzeć i interpretować w różny sposób. Powróćmy bowiem do rysunku 1 i jeszcze raz przyjrzyjmy mu się.

Analizując go uczeń może najpierw dostrzec dwie gromadki, potem ustalić, że w każdej z nich są 4 kółka, a zatem wszystkich kółek jest $2 \cdot 4 = 8$. Taki schemat myślenia odpowiada określonemu wcześniej rozumieniu mnożenia (2 gromadki po 4 kółka). Analizowanie rysunku i myślenie ucznia może przebiegać jednak inaczej. Najpierw może on skupić uwagę na liczbie kółek w każdej gromadce i ustalić, że w każdej jest po 4 kółka, a potem na liczbie gromadek. To odpowiada stwierdzeniu „4 kółka są w każdej z dwóch gromadek", co przekłada się na adekwatny do przeprowadzonego rozumowania zapis $4 \cdot 2 = 8$, jednak niezgodny z wcześniej przyjętymi konwencjami i ustalonemu rozumieniu mnożenia. Ponadto, np. ilustrowanie dzielenia w aspekcie podziału na równe części, bez możliwości wykonywania ruchów: przesuwania i rozdzielania, a jedynie np. rysowania kresek jest trudne, a powstały rysunek – mało czytelny.

Po drugie, jak słusznie zauważyła Gruszczyk-Kolczyńska (2015, s. 77), umiejętności mnożenia i dzielenia kształtują się niezależnie od umiejętności dodawania i odejmowania, jako osobne umiejętności, które potem połączą się ze sobą w strukturę czterech działań arytmetycznych. A zatem kształtowanie umiejętności mnożenia i dzielenia, nie powinno się zaczynać od pokazania związku mnożenia z dodawaniem, lecz ten związek powinien zostać odkryty przez ucznia wtedy, gdy już będzie on dobrze rozumiał sens każdego z tych działań.

2.3. Mnożenie i dzielenie ułamków

W klasach IV–V uczniowie nabywają umiejętności związane z mnożeniem i dzieleniem ułamków. Zazwyczaj rozpoczyna się od mnożenia liczby naturalnej przez ułamek. Warto tutaj nawiązać do sensu mnożenia wyniesionego przez ucznia z wcześniejszej edukacji. Jeżeli czwartoklasista wie, że np. zapis $5 \cdot 3$ oznacza „5 razy po 3”, to zapis $5 \cdot \frac{3}{4}$ oznacza „5 razy po $\frac{3}{4}$”, czyli $\frac{15}{4}$ ($5 \cdot \frac{3}{4} = \frac{15}{4}$), co można zilustrować rysunkiem (rys. 2).

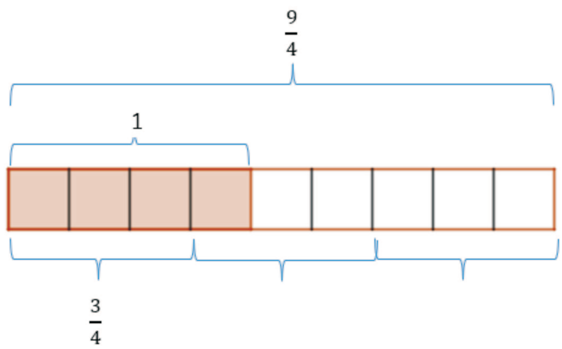


Rys. 2

Analiza powyższego rysunku pozwala wywnioskować, że zostało zamalowane po $\frac{3}{4}$ z każdego z 5 jednakowych prostokątów, a zatem $\frac{3}{4} \cdot 5 = \frac{15}{4}$. Wniosek ten wypływa wprost z przemienności mnożenia. Wykonanie wielu takich ćwiczeń powinno doprowadzić ucznia do wniosku, że mnożenie liczby naturalnej przez ułamek lub ułamka przez liczbę naturalną sprowadza się do pomnożenia licznika ułamka przez tę liczbę naturalną i pozostawienia mianownika bez zmian.

Na drugim etapie edukacyjnym warto pokazać uczniom, że geometryczną interpretacją mnożenia jest pole prostokąta. Należy wyjść od sytuacji znanych uczniom z klas młodszych, a mianowicie od zliczania kwadratów jednostkowych, zawartych w tym prostokącie. Jeżeli boki prostokąta wyrażają się liczbami naturalnymi, np. 5 i 3, to uczeń powinien zauważyć, pole tego prostokąta jest równe iloczynowi $5 \cdot 3$ ponieważ mamy 5 rzędów i w każdym rzędzie po trzy kwadraty. Określenie to pozostanie również prawdziwe, jeżeli długości jednego lub obu boków prostokąta będą ułamkami, tylko wtedy należy zliczać również części kwadratów jednostkowych (Turnau, 1985, s. 254).

Również przy wprowadzaniu dzielenia ułamków zwykłych warto bazować na umiejętnościach ucznia wyniesionych z klas I–III. Jednak to, do którego z dwóch wymienionych wcześniej aspektów dzielenia należy się odwołać zależy od tego, czy dzielimy ułamek przez liczbę naturalną, czy liczbę naturalną przez ułamek. Rozważmy przykład $\frac{9}{4} : 3$. Dzielenie to można zinterpretować jako podział prostokąta na równe 3 części i zilustrować następująco (rys. 3).



Rys. 3

Na powyższym rysunku zacieniowany obszar oznacza całość (jedynkę), która została podzielona na 4 jednakowe części (kwadraty). Każdy kwadrat odpowiada ułamkowi $\frac{1}{4}$, a zatem prostokąt składający się z 9 jednakowych kwadratów reprezentuje ułamek $\frac{9}{4}$. Po podzieleniu tego prostokąta na 3 równe części uczeń powinien zauważyć, że wynik jest reprezentowany przez prostokąt złożony z trzech kwadratów, a zatem $\frac{9}{4} : 3 = \frac{3}{4}$. Jednak w przypadku działania $\frac{9}{4} : 3$ odwołanie się do dzielenia w aspekcie mieszczenia nie ma sensu.

Zupełnie odmienną jest sytuacja, w której należy podzielić liczbę przez ułamek, np. $3 : \frac{3}{4}$. W tym przypadku podział na równe części traci swój sens, bo nie wiadomo, co to znaczy podzielić na $\frac{1}{4}$ równych części. W takich sytuacjach uczniowie często popełniają błąd, stwierdzając, że trzeba podzielić na 4 równe części, tym samym myląc dzielenie $3 : \frac{1}{4}$ z dzieleniem $3 : 4$. Jeszcze częściej pojawia się on wtedy, gdy dzielą liczbę przez $\frac{1}{2}$. Wtedy mówią, że „dzielą na pół”, czyli na dwie równe części (Siwek i Turnau, 1988, s. 56). W takich sytuacjach można natomiast odwołać się do wytworzonych intuicji dzielenia w aspekcie mieszczenia. Warto poszukać przykładów z życia, których modelem matematycznym byłoby podane działanie. Np. dla działania podanego wcześniej zadanie mogłoby być następujące: „Ile szklanek należy przygotować, aby wypełnić je 3 litrami soku?" Uczeń bazując na swojej wiedzy i doświadczeniu powinien zauważyć, że $3 : \frac{1}{4} = 12$.

2.4. Mnożenie i dzielenie liczb całkowitych

Wprowadzając mnożenie liczb całkowitych ujemnych w klasie V lub VI szkoły podstawowej warto zacząć od mnożenia liczby naturalnej przez liczbę całkowitą ujemną. Można tutaj odwołać się do sytuacji kilkukrotnego zaciągania długu (reprezentowanego przez liczbę ujemną) w takiej samej wysokości. Jeżeli np. 3 razy zaciągniemy dług po 5 zł, to łącznie będziemy mieli dług w wysokości $3 \cdot (-5) = -15$. Problem pojawia się przy mnożeniu dwóch liczb ujemnych. Tu odwołanie się do długu lub innych sytuacji realnych jest często niemożliwe lub bezsensowne. Bo co to znaczy np. zaciągnąć dług „minus 3 razy"?

Aby uświadomić uczniom w jaki sposób mnożymy dwie liczby ujemne, można zaproponować im, podobnie jak w klasach I–III, obserwację regularności uporządkowanych iloczynów, np.

$$3 \cdot (-5) = -15$$
$$2 \cdot (-5) = -10$$
$$1 \cdot (-5) = -5$$
$$0 \cdot (-5) = 0.$$

Analiza powyższych przykładów prowadzi do odkrycia reguły, że jeżeli pierwszy czynnik zmniejszamy o 1, to wynik mnożenia zwiększa się o 5. Postępując tak dalej uczniowie odkrywają, że iloczyn dwóch liczb ujemnych jest liczbą dodatnią.

$$(-1) \cdot (-5) = 5$$
$$(-2) \cdot (-5) = 10$$
$$(-3) \cdot (-5) = 15$$

Natomiast dzielenie liczb całkowitych ujemnych można wprowadzić, wykorzystując to, że mnożenie i dzielenie są działaniami wzajemnie odwrotnymi.

2.5. Iloczyn i iloraz jako działanie i jako wynik działania

Choć już w klasach I–III, uczniowie używają terminów: iloczyn i iloraz, to zazwyczaj dopiero w starszych klasach zwraca się uwagę na fakt, że pojęcia te mają podwójne znaczenie – są rozumiane jako działanie lub wynik tego działania. Dopóki uczeń wykonuje działania w zbiorze liczb wymiernych nie powoduje to większych nieporozumień. Jednak nauczyciel powinien być świadomy tego, że jeśli formułuje polecenie typu „zapisz iloczyn liczb 14 i 25" powinien oczekiwać odpowiedzi $14 \cdot 25$, natomiast gdy polecenie brzmi „oblicz iloczyn liczb 14 i 25" poprawną odpowiedzią jest 350.

Problemy i nieporozumienia pojawiają się wtedy, gdy uczeń ma wykonać działanie typu: $30 : 5\sqrt{3}$. Wynikają one w dużej mierze z braku zrozumienia czym jest działanie, a czym wynik działania. Otóż wynikiem działania $5 \cdot \sqrt{3}$, czyli iloczynu liczby wymiernej 5 i niewymiernej $\sqrt{3}$ jest liczba niewymierna $5\sqrt{3}$. Pominięcie kropki (które uczniowie często stosują bez rozumienia istoty) oznacza, że nie jest już rozważane działanie, tylko jego wynik. Analogiczna sytuacja jest wtedy, gdy uczeń zamiast pisać $2 \cdot 3$, pisze wynik tego działania, czyli 6. A zatem w przypadku działania $30 : 5\sqrt{3}$ należy wykonać dzielenie dwóch liczb: liczby wymiernej 30 i niewymiernej $5\sqrt{3}$. Oczywiście liczbę $5\sqrt{3}$ można zastąpić mnożeniem, ale wtedy należy działanie to zapisać w nawiasie, czyli: $30 : (5 \cdot \sqrt{3})$, zaś zapis $30 : 5 \cdot \sqrt{3}$ jest błędny. Można tu odwołać się do pewnej analogii – zamiast $30 : 6$ można napisać $30 : (2 \cdot 3)$, ale zapis $30 : 2 \cdot 3$ w przypadku dzielenia liczby 30 przez 6 nie jest poprawny.

3. Błędy w kształtowaniu umiejętności mnożenia i dzielenia

Wcześniejsze rozważania pozwalają wyróżnić kilka błędów związanych z kształtowaniem umiejętności mnożenia i dzielenia. Krótko je tutaj scharakteryzuję.

3.1. Zbyt późne rozpoczynanie kształtowania umiejętności mnożenia i dzielenia

Ponieważ już dziecko przedszkolne ma pewne intuicje związane z mnożeniem i dzieleniem, więc należy je rozwijać począwszy od tego okresu. Tymczasem zgodnie z polską metodyką edukacji matematycznej kształtowanie mnożenia i dzielenia rozpoczyna się dopiero w klasie II szkoły podstawowej, gdy przynajmniej w założeniu, dziecko już opanuje umiejętności dodawania i odejmowania liczb naturalnych. To oznacza, że dziecko od okresu przedszkolnego do klasy II nie ma stwarzanych możliwości optymalnego rozwoju swoich umiejętności w zakresie mnożenia i dzielenia.

3.2. Zbyt szybkie przechodzenie od konkretów do abstrakcji i zbyt szybkie wprowadzanie własności mnożenia

W okresie przedszkolnym i edukacji wczesnoszkolnej, mnożenie, podobnie jak każde działanie matematyczne, jest silnie powiązane z wykonywanymi działaniami na konkretnych przedmiotach. Dla dziecka każda liczba występująca w iloczynie ma inne znaczenie. W tym okresie może ono jeszcze nie dostrzegać przemienności mnożenia. Zbyt szybkie wprowadzanie tej własności i nadawanie obu liczbom takiego samego znaczenia, poprzez nazywanie ich obu czynnikami, może być dla dziecka niezrozumiałe i generować w przyszłości trudności w uczeniu się.

3.3. Określanie mnożenia jako skróconego zapisu dodawania tych samych składników

W wielu obecnie funkcjonujących podręcznikach, mnożenie wprowadza się klasie II jako skrócony (lub inny) zapis dodawania tych samych składników, ilustrując je przykładami typu:

$$5 + 5 + 5 = 3 \cdot 5,$$
$$3 + 3 + 3 + 3 + 3 = 5 \cdot 3.$$

Takie ujęcie jest często powtarzane w klasie III i IV. Jednak taka metodyka jest niewłaściwa przynajmniej z kilku powodów. Po pierwsze, ten sposób wprowadzenia mnożenia nie znajduje uzasadnienia w przypadku iloczynów typu: $2 \cdot 4$, $1 \cdot 4$, $0 \cdot 4$. Czy formuła $2 \cdot 4$, jest krótsza niż $4 + 4$? Czy zapis $1 \cdot 4$ jest krótszy niż zapisanie tylko liczby 4? Co to znaczy „suma jednego składnika"? A jak należy rozumieć zapis $0 \cdot 4$? Przecież sformułowania: „suma 1 składnika" lub „suma 0 składników" nie mają sensu. Jak zauważa Semadeni (2015, s. 84) jest to wprowadzenie nowego, trudnego pojęcia, jakim jest mnożenie liczb, za pomocą innego abstrakcyjnego i jeszcze niedostatecznie utrwalonego pojęcia – wielokrotnego dodawania. Gruszczyk-Kolczyńska (2015, s. 76) zwraca też uwagę, że uczniowie, którzy rozumieją mnożenie jako skrócony sposób zapisu dodawania jednakowych składników, często utożsamiają mnożenie z dodawaniem. Mając do obliczenia iloczyn dwóch liczb w rzeczywistości nie wykonują mnożenia lecz dodawanie. Dopóki dotyczy to małych liczb, to takie postępowanie nie razi. Jednak trudności zaczynają się wtedy, gdy uczeń ma pomnożyć np. dwie liczby dwucyfrowe.

Kolejny powód, dlaczego nie należy wprowadzać mnożenia jako skróconego zapisu dodawania jednakowych składników jest jeszcze ważniejszy, gdyż jest związany z ciągłością procesu uczenia się matematyki. Prawidłowe kształtowanie pojęcia matematycznego na danym etapie powinno uwzględniać cały dalszy proces kształtowania tego pojęcia na kolejnych etapach. Mnożenie liczb naturalnych powinno stanowić podstawę do kształtowania mnożenia liczb wymiernych lub, inaczej mówiąc, mnożenie liczb naturalnych powinno być szczególnym przypadkiem mnożenia liczb rzeczywistych, takim przypadkiem, który łatwo można uogólnić na ułamki, a potem na liczby wymierne i liczby rzeczywiste. Jeżeli zatem wprowadzimy mnożenie jako skrócony zapis dodawania tych samych składników, to jak w takiej sytuacji zinterpretować np. mnożenie dwóch liczb wymiernych $\frac{3}{7} \cdot \frac{5}{9}$ lub $(-4,7) \cdot (-3,1)$? Co więcej, dla wielu uczniów mnożenie zawsze będzie kojarzyło się ze skróconym zapisem dodawania jednakowych składników, bez względu na to jakie będą czynniki. Działania nauczyciela w klasach starszych, mające na celu zmianę tego pierwotnego rozumienia mnożenia może nie tylko nie przynieść oczekiwanych efektów, ale spowodować frustrację i niechęć do nauki matematyki (Turnau, 1985, s. 253).

3.4. Nauczanie nastawione na głównie na pamięciowe opanowanie tabliczki mnożenia

Nauczanie nastawione głównie na pamięciowe opanowanie tabliczki mnożenia często nie tylko jest nieskuteczne, ale może rodzić trudności w nauce matematyki; takie trudności, które trudno zauważyć w klasach młodszych, i które ujawniają się dopiero w klasach starszych (począwszy od klasy IV), wtedy, gdy są już trudne do przezwyciężenia (Semadeni, 2015 s. 17–18, Czajkowska 2020, s. 89–90). Uczeń może bowiem bez zrozumienia nauczyć się pewnych treści matematycznych „na pamięć”, tak jak możliwe jest zapamiętanie ciągu symboli czy słów, które nie są ze sobą powiązane w żaden sposób. Ponieważ na lekcjach, na których są one realizowane, uczeń potrafi je odtworzyć, a często nawet zastosować w typowych sytuacjach, więc zarówno u nauczyciela jak i u ucznia powstaje błędne przekonanie, że już te treści opanował. Jednak wraz z upływem czasu zapamiętane treści ulegają różnym deformacjom, a uczeń nie ma możliwości zweryfikowania ich poprawności, ponieważ nie mają one dla niego żadnego znaczenia. Dlatego np. uczeń, który w drugiej klasie bezbłędnie recytował tabliczkę mnożenia z pamięci, ale bez rozumienia sensu mnożenia, w klasie czwartej może napotkać trudności z obliczaniem pól prostokątów, zamianą jednostek, rozszerzaniem i skracaniem ułamków, czy też działaniami na nich (Czajkowska 2020, s. 89). Nie oznacza to jednak, że należy całkowicie odejść od pamięciowego opanowania tabliczki mnożenia. Chodzi o to, aby zachować rozsądek i odpowiednie proporcje między opanowaniem narzędzi i technik rachunkowych oraz relacyjnym rozumieniem mnożenia lub dzielenia. Pamięciowe opanowanie tabliczki mnożenia jest ważne w edukacji matematycznej, lecz jeszcze ważniejsze jest to, aby uczeń potrafił sobie poradzić w sytuacji, gdy zapomniał jaki jest wynik mnożenia konkretnych liczb.

3.5 Zbyt duże położenie nacisku na zapamiętanie algorytmów działań pisemnych bez zrozumienia ich istoty

Jednymi z umiejętności jakie powinien posiąść uczeń w szkole podstawowej jest wykonywanie mnożenia i dzielenia sposobem pisemnym. Są one ważne, jednak należy pamiętać o tym, aby nie kłaść zbyt dużego nacisku tylko na stosowanie tych algorytmów, bez zrozumienia ich istoty. Ponadto warto pokazać uczniom również inne sposoby i algorytmy wykonywania mnożenia lub dzielenia, np.: mnożenie i dzielenie „po kawałku”, mnożenie „po japońsku” lub mnożenie „po hindusku” (zwane też mnożeniem „po przekątnej”).

4. Zakończenie

Powróćmy do pytań postawionych na początku tego tekstu. Jak już pisałam, w klasach młodszych mnożenie jest silnie powiązane z manipulacjami na konkretach i nie jest postrzegane jako działanie przemienne. A zatem zapis: $4 \cdot 2 = 8$ nie opisuje przedstawionej sytuacji. Jednak nie można tego rozwiązania uznać za błędne. W przypadku statycznego rysunku, sposób jego postrzegania może być różny. Ponadto należy wziąć też pod uwagę ciągłość edukacyjną i to, że uczeń, o ile już nie odkrył, to wkrótce odkryje, że mnożenie jest przemienne. Dlatego w mojej opinii nauczyciel, który odrzuca i negatywnie ocenia przedstawione przez ucznia rozwiązanie: $2 \cdot 4 = 8$, postępuje niewłaściwie. Pomimo dobrych intencji, swoim postępowaniem może blokować rozwój umiejętności matematycznych ucznia, ale też przyczyniać się do powstania negatywnej postawy ucznia do matematyki i uczenia się tego przedmiotu.

W drugim przypadku poprawnym wynikiem działania: $36 : 2\sqrt{3}$ jest $6\sqrt{3}$, bowiem mamy tutaj do czynienia z ilorazem dwóch liczb.

Literatura

C z a j k o w s k a M., H a r t m a n A.: 2021, *Umiejętności polonistyczne, matematyczne i przyrodnicze trzecioklasistów*, *Raport ze Sprawdzianu Kompetencji Trzecioklasisty Omnibus 2021*, Wydawnictwo MAC, Kielce.

C z a j k o w s k a M., M a c i e j e w s k a - D z i d o I.A.: 2022, *Umiejętności polonistyczne, matematyczne i przyrodnicze trzecioklasistów*, *Raport ze Sprawdzianu Kompetencji Trzecioklasisty Omnibus 2022*, Wydawnictwo MAC, Kielce.

C z a j k o w s k a M.: 2020, *Przyczyny niepowodzeń w nauce matematyki. Jak szkoła może wspierać rozwój dziecka w zakresie rozwijania zdolności myślenia i nabywania kompetencji matematycznych*, w: Szurowska B. *Szkoła w sytuacji trudnej. Zdążyć z pomocą,* Wydawnictwo Difin S.A. s. 85–107, Warszawa:

G r u s z c z y k - K o l c z y ń s k a E., Z i e l i ń s k a E.: 2015, *Dziecięca matematyka – dwadzieścia lat później*, Wydawnictwo Bliżej Przedszkola, Kraków.

G r u s z c z y k - K o l c z y ń s k a E.: 2021, *Jak pomóc dziecku pokonać niepowodzenia w nauce matematyki?* Wydawnictwo Bliżej Przedszkola, Kraków.

K a r p i ń s k i M., N o w a k o w s k a A., O r z e c h o w s k a M., S o s u l s k a D., Z a m b r o w s k a M.: 2014, *Raport z ogólnopolskiego badania umiejętności trzecioklasistów OBUTm 2014*. IBE, Warszawa.

N a w o l s k a B., Ż ą d ł o J.: 2005, *Kilka uwag o przygotowaniu studentów pedagogiki wczesnoszkolnej do nauczania matematyki w klasach I-III*, w: Treliński G. i Czajkowska M. (red.), *Kształcenie matematyczne – tendencje, badania, propozycje dydaktyczne*, Wydawnictwo Akademii Świętokrzyskiej, s. 263–272, Kielce.

S e m a d e n i Z.: 2015, *Matematyka w edukacji początkowej – podejście konstruktywistyczne*, w: Semadeni Z., Gruszczyk-Kolczyńska E., Treliński G., Bugajska-Jaszczołt B., Czajkowska M., *Matematyczna edukacja wczesnoszkolna*, Wydawnictwo Pedagogiczne ZNP, s. 9–167, Kielce.

S i w e k H., T u r n a u S.: 1988, *Mnożenie i dzielenie ułamków*, w: Semadeni Z. (red.), *Nauczanie początkowe matematyki, T. 4,* WSiP, s. 48–60, Warszawa.

T u r n a u S.: 1985, *Mnożenie i dzielenie liczb naturalnych*, w: Semadeni Z. (red.), *Nauczanie początkowe matematyki T. 3,* WSiP, s. 252–258, Warszawa.

Selected issues concerning the development of multiplication and division skills

Summary

Educational research, observations of school practice and discussions in the public space show that many people – children, teenagers and adults – have insufficiently mastered calculation skills. In particular, it is difficult to perform multiplication and division in ever-wider sets of numbers. The reasons for this situation can be found in the wrong methodology. In the article I show how, in the context of educational continuity, multiplication and division skills are shaped and what mistakes are made in this area.