Jak to z mnożeniem było, a jak może być

Ewa Swoboda
PWSTE Jarosław, ewa.swoboda@pwste.edu.pl

Krystyna Sawicka
Kuratorium Oświaty w Lublinie, krystyna.sawicka@kuratorium.lublin.pl

Streszczenie

W klasach początkowych działanie mnożenia na ogół jest wprowadzane jako „skrócone dodawanie jednakowych składników". Takie ujęcie jest bardzo zakorzenione w polskiej tradycji, o czym przekonuje krótki przegląd szkolnych podręczników od początków XX wieku. To rozwiązanie uważamy za bardzo niedobre, gdyż naszym zdaniem niesie ono za sobą różne negatywne konsekwencje. Jedną z nich jest fakt, że przy takim ujęciu jakby naturalne staje się położenie nacisku na pamięciowe opanowanie tabliczki mnożenia, ratujące przed pomyłkami w wykonywaniu dodawania wielu składników.

Dużo ważniejszą, negatywną konsekwencją są blokady w dalszym poznawaniu własności mnożenia (np. prawo przemienności, łączności, mnożenie przez 1 i przez 0), jak i trudności w wykorzystaniu tak tworzonego pojęcia przy mnożeniu liczb innych niż naturalne. Dlatego konieczne jest szukanie innych rozwiązań metodycznych dla wprowadzania dzieci w rozumienie czym jest mnożenie jako działanie w dowolnym zbiorze liczbowym.

W tym artykule proponujemy taką nitkę dydaktyczną, rozpoczynającą się od pewnych zabiegów dydaktycznych już w klasie I. Pokazujemy wieloaspektowość pojęcia mnożenia, sugerujemy jak zapoznawać z wykonywaniem obliczeń. Wskazujemy, na jakie inne zagadnienia należy zwrócić uwagę przy kontynuowaniu nauki w tym zakresie.

Zaprezentowana propozycja nie wyczerpuje wszystkich zagadnień związanych z tematyką „mnożenie w nauczaniu wczesnoszkolnym". Nie musi być też wolna od innych, jeszcze dla nas nieuświadomionych, błędów. Może być jednak głosem w dyskusji w kierunku polepszania metodyki nauczania matematyki na tym poziomie edukacyjnym.

1. Wstęp. Zacznijmy tradycyjnie – od cytatu

Prawidłowe metodyczne opracowanie każdego pojęcia matematycznego uwzględniać musi cały dalszy rozwój tego pojęcia w następnych klasach. Czynnik ten jest daleko ważniejszy od historycznej genezy tego pojęcia (tj. historii jego powstania w dziejowym rozwoju ludzkości), traktowanej niekiedy jako drogowskaz dla dydaktyki. (...) W wyniku naucza-

nia szkolnego uczeń powinien dobrze rozumieć działania arytmetyczne na liczbach wymiernych, zarówno dodatnich jak i ujemnych, oraz umieć wykonywać je numerycznie (tj. z cyfrowym zapisem wyniku) w systemie dziesiątkowym, jak i w postaci ułamków zwykłych. Stanowi to z jednej strony bardzo ważny składnik wykształcenia, z drugiej – poglądową bazę dla późniejszego rozumienia działań na liczbach rzeczywistych, niezbędnego dla przyswojenia dalszych, bardziej abstrakcyjnych pojęć matematyki.

Arytmetyka liczb naturalnych stanowi w perspektywie jedynie pierwszy etap kształtowania pojęć arytmetycznych. Działania na liczbach naturalnych są, a raczej powinny stać się dla ucznia szczególnym przypadkiem działań na liczbach wymiernych, szczególnym przypadkiem, który łatwo daje się rozszerzyć, najpierw na ułamki zwykłe i dziesiętne, potem na liczby ujemne, obejmując w ten sposób pełny zakres liczb wymiernych. O tym, czy rozszerzenie takie będzie pojęciowo łatwe, decyduje w pierwszym rzędzie sposób wprowadzania działań na liczbach naturalnych.

Mnożenie wprowadzało się dotychczas jako „nudne dodawanie", tj. dodawanie równych składników. (...) Ujęcie to sprawiało, że dla niejednego ucznia do końca jego kariery szkolnej, a prawdopodobnie i do końca życia, mnożenie kojarzyło się najpierw z „dodawaniem jednakowych składników", bez względu na to jakie liczby były czynnikami. A przecież interpretacja iloczynu 2,3 · 0,25 jako sumy jednakowych składników wymagałaby tak wymyślnego i sztucznego rozumowania, że byłaby z pewnością dla ucznia niedostępna (Turnau, 1985, s. 252–253).

Ten cytat to jeden z wielu głosów krytykujących ustalony od lat sposób wprowadzania uczniów w rozumienie, czym jest mnożenie jako działanie matematyczne. Stefan Turnau podnosi tutaj jedną kwestię – trudność w poszerzeniu obrazu (rozumienia) pojęcia poza pierwsze jego rozumienie, związane z pierwszą poznaną reprezentacją tego pojęcia. Jest to niewątpliwie bardzo ważny argument, zwracający uwagę na istotny problem dydaktyczny. Wydaje się nam, że wprowadzanie w nauczaniu wczesnoszkolnym mnożenia jako skróconego zapisu dla działania dodawania jednakowych składników jest niewłaściwe z jeszcze innych powodów. I o tym będzie ten artykuł[1].

[1] Wszystkie rozważania zawarte w tym artykule są pokłosiem wspólnej pracy Krystyny Sawickiej i Ewy Swobody przy przygotowywaniu matematycznej części serii *Wielka Przygoda*, podręczników dla nauczania wczesnoszkolnego.

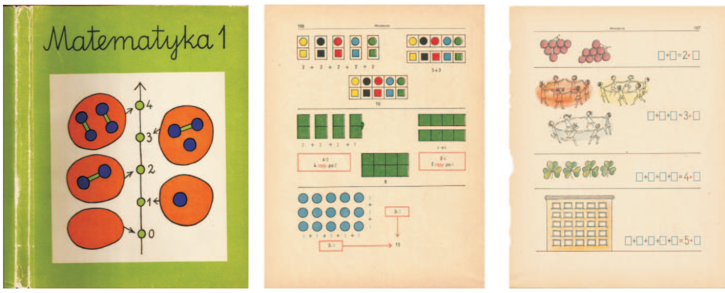
Od razu zastrzegamy, że zawarte tutaj myśli nie wyczerpują wszystkich problemów dotyczących metodycznego opracowania pojęcia mnożenia w nauczaniu wczesnoszkolnym.

1. Krótki historyczny przegląd polskich ujęć podręcznikowych dotyczących mnożenia

Skupimy się jedynie na wybranych podręcznikach XX i XXI wieku. Interesują nas sposoby wprowadzania uczniów w mnożenie. Poniżej wybrane skany z tych podręczników.

Fot. 1. Rusiecki i in. 1946, s. 99 i s. 101

Fot. 2. Rusiecki, Schayer, 1969, s. 126–127

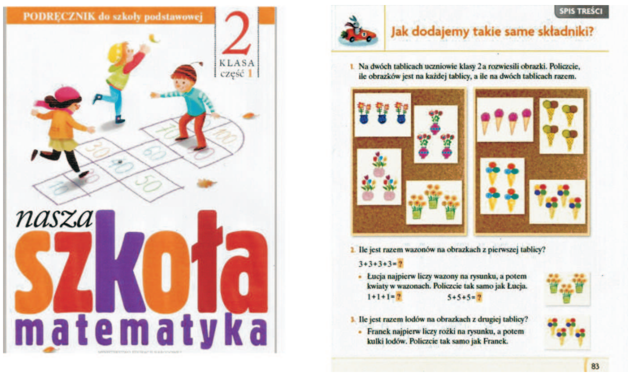


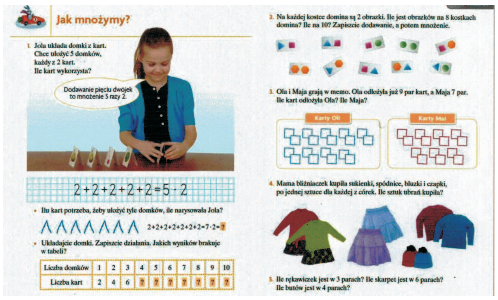
Fot. 3. Puchalska, Ryger, 1972, s. 106–107

Fot. 4. Cydzik, 1980, s. 96

Fot. 5. Lankiewicz, Semadeni, 1994, s. 47

Fot. 6. Wilk-Siwek, Kusion, 1995, s. 1–3

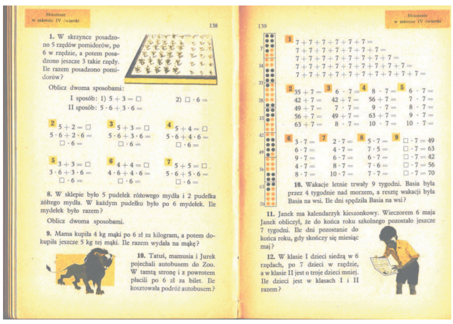




Fot. 7. Ludwa, Lorek, 2015

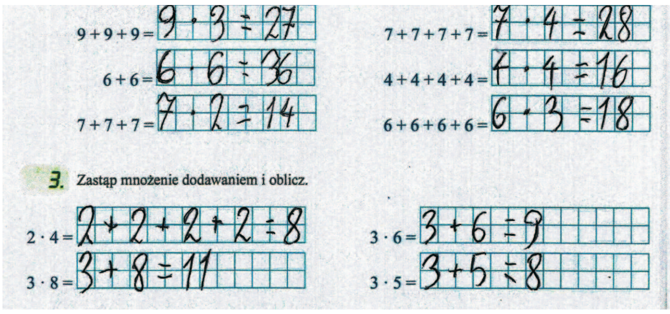
Takie przegląd przekonuje, że metodyczne ujęcie mnożenia jako „skróconego dodawania” od lat jest zakorzenione w naszej tradycji nauczania. Pojawiało się ono w podręcznikach szkolnych dla klasy I lub II, w zależności od zaawansowania w techniki rachunkowe uczniów. Było to ujęcie metodyczne odporne na wszelkie zmiany w podejściu do nauczania matematyki – ani „Nowa Matematyka” ani „Czynnościowe Nauczanie Matematyki”, czy „Realistyczne Nauczanie Matematyki” nie wpłynęły na zmiany w tym zakresie.

Ten sposób niesie za sobą jednak różne negatywne konsekwencje. Jedną z nich jest fakt, że przy takim ujęciu jakby naturalne staje się położenie nacisku na pamięciowe opanowanie tabliczki mnożenia. No bo przecież takie wielokrotne dodawanie, zwłaszcza dużej ilości większych liczb jednocyfrowych, grozi pomyłką, i jest rzeczywiście uciążliwe. Wtedy lepiej się tego wyniku nauczyć na pamięć. Zobaczmy, jak to w klasie II, w podręczniku Rusieckiego wyglądało.



Fot. 8. Uczeń wielokrotnie dodaje (dolicza) wartość 7; Rusiecki, Schayer, 1967, s. 137–139

Niestety, nie jest to ani jedyny, ani najważniejszy zarzut. Naszym zdaniem, największym błędem tego podejścia jest to, że pojęcie mnożenia wprowadzane było na poziomie symbolicznym – jeden symbol został zastąpiony innym symbolem. Nie towarzyszyła temu żadna przebudowa intuicji i wiedzy dotyczącej dodawania w kierunku wiedzy związanej z mnożeniem, ani próba budowania tej nowej wiedzy. W takim ujęciu wiedza dotycząca dodawania splata się z wieloma faktami prawdziwymi w obszarze mnożenia, co bardzo utrudnia dobre posługiwanie się mnożeniem. Dotyczy to nie tylko tzw. „skrajnych" przypadków (mnożenie przez 1 i przez 0, wyłączanie czynnika przed nawias, rozszerzenie mnożenia liczb naturalnych na inny zakres liczbowy. . . .). Czasami prowadzi to do naprawdę kuriozalnych pomyłek, takich jak zaprezentowana poniżej.



Fot. 9. Uczeń realizuje polecenie zastąpienia dodawania mnożeniem lub mnożenia dodawaniem

2. Linia dydaktyczna dotycząca kształtowania pojęcia mnożenia

Każde pojęcie matematyczne wyrosło z potrzeby opisu jakiegoś działania, zjawiska czy obiektu funkcjonującego w świecie, który nas otacza. W metodyce nauczania o liczbach naturalnych na ogół akceptujemy fakt, że istnieje wiele aspektów liczby naturalnej. Rozważa się również różne etapy rozumienia dodawania, odejmowania, dzielenia. Dlaczego przy tym nie wspomina się (albo nieczęsto) o różnych aspektach mnożenia? Prowadząc zajęcia ukierunkowane na rozumienie mnożenia, warto pamiętać, że:

- istnieje wiele różnych aspektów mnożenia, i skupienie się na jednym z nich powoduje blokady w pełnym jego rozumieniu;

- pełne rozumienie mnożenia, to coś innego niż pamięciowe opanowanie „tabliczki mnożenia".

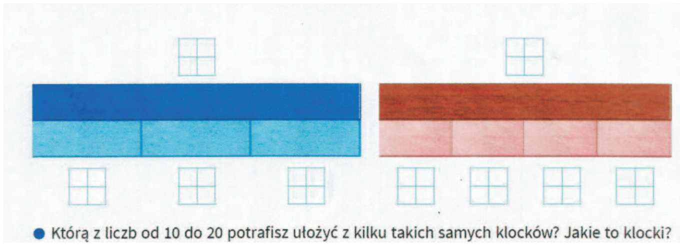
W pracy przy kształtowaniu pojęcia mnożenia ważnych jest kilka faktów. Nie są one niezależne od siebie. Poniżej omawiamy niektóre z nich.

2. 1. Wyczulanie na równoliczność zbiorów

Zanim dziecko zacznie przeliczać wyniki mnożenia, musi być wyczulone na równoliczność zbiorów, które reprezentują jedną z liczb występujących w działaniach. Dzieci z faktem równoliczności zbiorów spotykały się podczas kształtowania pojęcia liczby w aspekcie kardynalnym. Ale teraz chodzi całkiem o coś innego. Nie chodzi jedynie o to, ile jest elementów w każdym zbiorze, ale głównie o to, by sprawdzić (albo doprowadzić do sytuacji), że wszędzie jest tyle samo. Nie powinno się to odbywać poprzez rozpoznanie kodu: kilkakrotnie zapisanej liczebności określonych zbiorów (np. zapisu czterech piątek). Dziecko powinno samo tworzyć takie zbiory równoliczne albo zauważać równoliczność zbiorów. Takie sytuacje można organizować już w klasie I, przy różnych okazjach[2]. Zaczynamy więc od najbliższej dziecku, naturalnej szkolnej sytuacji, proponujemy wykonywanie grupowania uczniów w klasie, lub dostępnych dziecku przedmiotów. Padają przy tym pytania, ukierunkowujące na mnożenie: po ile elementów jest w każdym zbiorze? Ile jest zbiorów/grup? Ile jest razem? Niektóre z takich sytuacji są zaprezentowane poniżej.

[2]Sytuacje tworzenia zbiorów równolicznych przez dzieci w przedszkolu opisuje E. Gruszczyk-Kolczyńska (2012). Sugeruje przy tym, by równocześnie kodować te działania i wykonywać obliczenia. Jedno z takich zajęć przebiega następująco: Dzieci w grupach przygotowują wersję zabawy *Słodkie przyjęcie dla lalek i misiów.* Ustalają liczbę gości, a każdy gość ma dostać po 3 ciastka, po 4 cukierki i po 1 szklance soku. Ponieważ jest to zabawa, kasztany zastępują cukierki, klocki – ciastka, a małe pojemniczki – szklanki soku. Każda grupa zaprosiła inną liczbę gości, którzy dostaną po tyle samo różnych słodyczy, więc działań na mnożenie jest mnóstwo. (...) Przy omawianiu zabawy każda grupa dzieci podaje liczbę gości oraz liczbę przygotowanych słodyczy i wyjaśnia, jak to obliczyła. Na przykład, dzieci z jednej grupy zaprosiły 7 gości i wykonały działania $3 \cdot 7 = \ldots$, $4 \cdot 7 = \ldots$, $1 \cdot 7 = \ldots$ (str. 198–199). Podobne przykłady zajęć można znaleźć w książce E. Gruszczyk-Kolczyńskiej i M. Skury (2006) str. 37.

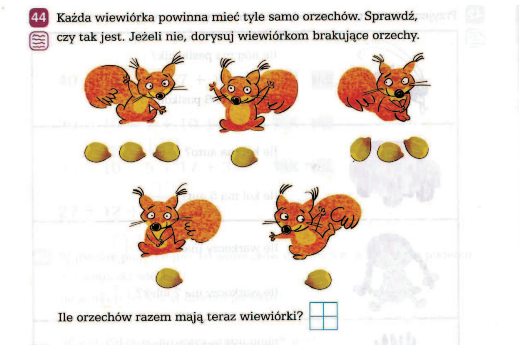
Fot. 10a. Zadanie 5. Sawicka, Swoboda, 2020a, s. 77



Fot. 10b. Zadanie 9. Sawicka, Swoboda, 2020b, s. 36

W zadaniu 5 – niech dziecko samo stwierdzi, że są dwie dziewczynki, i każda ma po 7 kredek, czyli mają po tyle samo. Można dodać, że razem mają 14 kredek. Na razie unikamy zapisu symbolicznego, proponujemy też, by nie sugerować zapisywania obliczeń za pomocą dodawania. Jeżeli któreś dziecko będzie chciało w ten sposób dokonywać przeliczeń, to nie należy zabraniać, przy czym równie akceptowalne jest proste przeliczenie wszystkich elementów występujących w zadaniu.

Zadanie 9 jest jeszcze innym sposobem tworzenia liczby poprzez zwielokrotnianie tej samej wielkości. Można je potraktować jako zadanie odwrotne do poprzedniego. Nie jest to jednak sytuacja nowa dla dziecka; wielokrotnie we wcześniejszych propozycjach zabaw z liczbami znajdowały się propozycję budowania liczby z takich samych klocków albo rozkładu liczby na zbiory „po tyle samo”. Teraz wystarczy, że dzieci same będą wybierały klocki tego samego koloru, tworzyły z nich „pociąg” i odczytywały jego wartość. Oczywiście, warto, by powiedziały, z jakich klocków zbudowały swój ciąg i ile klocków wykorzystały do jego zbudowania. W ten sposób nabiorą sensu dwie liczby (czynniki) uczestniczące w mnożeniu.



Fot. 11a. Lankiewicz, Sawicka, Swoboda, 2013, s.40

Fot. 11b. Sawicka, Swoboda, 2021a, s. 62

Zadanie o wiewiórkach stwarza dużo możliwości do dyskusji: jak uzupełnić rysunek, by wszystkie wiewiórki miały po tyle samo orzeszków? Można zauważyć, że są dwie wiewiórki, która są najbogatsze w orzeszki (po ile ich mają?). Dorysujmy więc innym wiewiórkom brakujące orzeszki. Ale gdyby tak można było być bardziej hojnym? Można zaproponować, że każdej wiewiórce dodajemy więcej orzeszków, ale tak, by było po równo. Po ile więc teraz ma każda wiewiórka (dzieci mogą zaproponować jakąś liczbę). Policzmy, ile orzeszków mają wszystkie wiewiórki? W ten sposób akcentujemy znaczenie dwóch liczb biorących udział w mnożeniu.

Zadanie 3 jest już w czystej formie podprowadzeniem pod mnożenie. Wskazują na to typowe dla mnożenia pytania: Ile jest stolików? Ile kredek jest na każdym stoliku? Ile jest wszystkich kredek? Warto jednak zauważyć, że rysunek nie sugeruje ani równoliczności, ani nie narzuca jaka ma być liczebność zbioru – to trzeba samemu stwierdzić.

2. 2. Budowanie co najmniej dwóch różnych modeli reprezentujących mnożenie. Słowny i symboliczny opis sytuacji, w której występuje kilka zbiorów równolicznych, ukierunkowany pytaniem „ile tutaj jest razem”?

Jeden z tych modeli często nazywany jest modelem „pudełkowym”, „garnuszkowym”, „pojemnikowym” albo jakoś podobnie. Opisuje sytuację, w której jest kilka zbiorów równolicznych. Ten model jest bardzo statyczny, gdyż musi zaistnieć możliwość całościowego objęcia myślą istnienia kilku zbiorów równolicznych. Często równoliczność należy sprawdzić, przeliczyć (czasami doprowadzić do równoliczności albo w świadomy sposób zbudować od początku zbiory równoliczne), ale mnożenie może mieć miejsce dopiero wtedy, gdy mamy pewność, że zbiory są równoliczne. Każda liczba występująca w zapisie ma inne znaczenie. Jedna mówi o tym, ile jest tych zbiorów (pudełek, garnuszków), a druga określa liczbę elementów w każdym z tych zbiorów. Sam sposób opisu tej sytuacji, związany z pytaniem „Ile jest razem?”, narzuca kodowane w ustalonym porządku: najpierw liczba zbiorów, potem liczebność zbioru. Zwróćmy przy tym uwagę, że jest to sytuacja wybiegająca poza sytuację mnożenia przez 1 lub przez 0 (jeżeli jest tylko jeden zbiór to nie ma sensu pytanie „ile jest razem”, a przecież nie chcemy, by dzieci funkcjonowały w sytuacji, która dla nich nie ma sensu!)

Fot. 12. Przykład reprezentacji mnożenia w aspekcie garnuszkowym, Sawicka, Swoboda, 2020a, s. 81

Przykład ten krótko zbiera doświadczenia związane z dotychczasowym kształtowaniem intuicji dotyczących mnożenia. Jest też podstawą do wprowadzenia samej symboliki działania mnożenia. W klasie można samemu wymyślać podobne przykłady, które będą zapisane za pomocą podanego zapisu (o dwóch torebkach jabłek po 5 sztuk, o dwóch dłoniach po 5 palców, o dwóch stosach talerzyków po 5 sztuk itd.).

Ale jest też inna sytuacja, w której aktywność przebiega w innej kolejności, gdyż uwaga dziecka skupiona jest na innych elementach. Tę sytuację nazywamy „model poprzez zwielokrotnianie". Popatrzmy na rysunek:

Fot. 13. Przykład reprezentacji mnożenia jako zwielokrotniania, Sawicka, Swoboda, 2020a, s. 82

W tym przypadku nie ma powodu, by sprawdzać równoliczność, bo to widać. Zmuszanie dzieci do sprawdzania, że na każdej gałązce są 4 pomidory może wzbudzić niechęć i poczucie bezsensownego działania. Równoliczność widać, trzeba tylko odpowiedzieć ile jest elementów w jednym zbiorze, i ile tych zbiorów jest. W takiej sytuacji nie dziwi, że dzieci często zapisują takie mnożenie: $4 \cdot 3$ (bo jedna gałązka ma 4 pomidory, i są 3 takie same gałązki). Kodują ją więc w innej kolejności, niż to ma miejsce w pierwszej sytuacji.

Zespolenie tych dwóch sytuacji to dydaktyczny problem, który nie ma jeszcze żadnego związku z rozumieniem przemienności mnożenia (niezależnie od tego, że $3 \cdot 4 = 4 \cdot 3$). Zmiana kolejności zapisu czynników wynika z innego kierunku skupienia uwagi dziecka, jest motywowana inną potrzebą zakodowania zauważanych fenomenów.

Warto jednak podkreślić, że takie modele dla mnożenia niosą ze sobą wiele korzyści. Podstawowy – to budowanie wyobrażenia mnożenia, bez stosowania zapisu symbolicznego dotyczącego dodawania. Ale kolejna korzyść związana jest z samymi „pudełeczkami". Bo w „pudełeczku" może być nie tylko po kilka kulek (reprezentujących liczby naturalne), ale również np. 1,25 kg cukru czy $\frac{1}{2}$ litra soku. Można również rozważać sytuację, że zostało zapełnionych $3\frac{1}{2}$ pojemników. Da to możliwość dalszego rozszerzania pojęcia mnożenia na inne liczby niż naturalne.

Co więc chcemy osiągnąć na tym etapie?

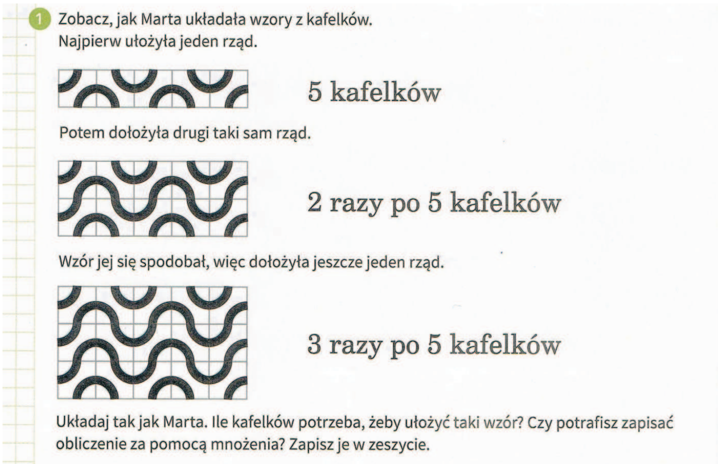
1. Budujemy świadomość, że mnożenie jest działaniem na pewnej wielkości (pudełeczku o określonej zawartości) reprezentowanej przez liczebność określnego zbioru. W działaniu występuje kilka takich zbiorów.
2. Oswajamy dzieci z kodowaniem „statycznej”, finalnej sytuacji związanej ze stosowaniem mnożenia.
3. Oswajamy z prostymi zagadnieniami, które można rozwiązywać za pomocą mnożenia.
4. Oswajamy z niektórymi wynikami mnożenia (małych liczb, niekoniecznie w wąskim zakresie np. do 30).
5. Akceptujemy sytuację, że odpowiedź na pytanie „Ile jest razem?” dzieci otrzymają poprzez dodawanie albo przeliczanie, ale to działanie traktujemy tylko jako techniczną metodę znalezienia rozwiązania, nie jako opis całej sytuacji.

Czego jeszcze uczeń nie zna ani nie potrafi zaakceptować?

6. Własności działań:
   1. mnożenia przez 1, 0;
   2. praw działań – głównie przemienności mnożenia, ani rozdzielności mnożenia względem dodawania.

2. 3. Kolejny model reprezentujący mnożenie

Jest on często nazywany modelem szeregowo-kolumnowym. My go nazywamy „modelem czekoladowym”. Wprowadzenie tego modelu jest oczekiwane wtedy, gdy uczeń zaakceptuje sytuację istnienia kilku zbiorów równolicznych. Teraz na tę sytuację nakładamy określoną strukturę. I znów – jest to statyczny model dla mnożenia. Niezależnie od działań prowadzących do stworzenia takiego modelu, jego opis za pomocą mnożenia jest możliwy dopiero wtedy, gdy model funkcjonuje w postaci skończonej (musi być wiadomo, ile jest obiektów i jaka jest ich liczebność). Poniżej prezentujemy pewną propozycję pracy z tym modelem.



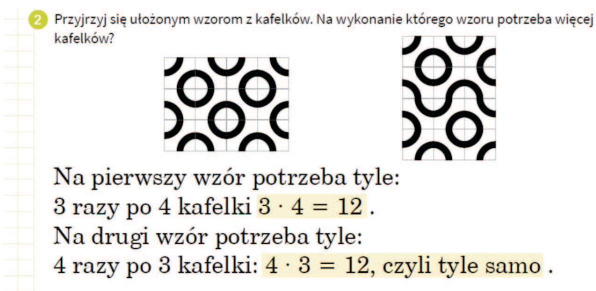
Fot. 14. Przykład reprezentacji mnożenia w aspekcie czekoladowym, Sawicka, Swoboda, 2020a, s.92

Zadanie 1. Reprezentowanie mnożenia w układzie szeregowo-kolumnowym wcale nie jest oczywiste i łatwe. Przede wszystkim dlatego, że zachowanie takiego układu wymaga odpowiedniego treningu. W tym podręczniku ćwiczyłyśmy wcześniej taki układ przez proponowanie innych zadań, na przykład na szachownicy, przez umieszczenie danych w tabelkach, czy poruszanie się po pokratkowanej płaszczyźnie. Teraz zachowanie porządku ułatwia kwadratowy kształt sztywnego kafelka.

W układzie czekoladowym liczba elementów w każdym rzędzie jest taka sama i liczba elementów w każdej kolumnie jest taka sama. Na równoliczność elementów dzieci powinny być już wyczulone, i powinny ten fakt kojarzyć z mnożeniem. Ale układ szeregowo-kolumnowy, jest podstawowym modelem mnożenia w którym w przekonujący sposób można prezentować dziecku przemienność mnożenia, czyli własność, że dla dowolnych liczb (naturalnych) a, b zachodzi równość: $a \cdot b = b \cdot a$; liczenie kostek czekolady w dowolnym położeniu nie wpływa na zmianę liczby tych kostek.

Przykład prezentowany w zadaniu warto omówić razem z dziećmi, zwracając uwagę na liczebność każdego rządka i na sposób opisu liczby wykorzystanych kafelków. Naturalnym przedłużeniem takiego zadania będzie samodzielne budowanie układanki. Będzie to wymagało czasu, gdyż dzieci mogą skupić swoją uwagę bardziej na układanym wzorze, niż na liczbie kafelków. Ten fakt trzeba wyróżnić podczas omówienia dziecięcych prac. Jednak to, co powinno być najbardziej istotne to matematyczny opis sytuacji, wiodący do konkluzji, w jaki sposób poprzez mnożenie zapisać ile kafelków zostało zużytych.

Ten model wykorzystujemy dla wyczulenia na przemienność mnożenia. Musi ona wybrzmieć nie przez to, że (być może – przypadkowo!) wynik mnożenia np. $3 \cdot 4$ jest taki sam jak dla mnożenia $4 \cdot 3$. Dlatego proponujemy taką sytuację, w której dziecko jest przekonane, że ogólna liczba elementów biorący udział w mnożeniu jest niezmienna, zmienia się jedynie reprezentacja „czekoladowa”, raz jest opisana jako $a \cdot b$, a potem można ją opisać jako $b \cdot a$. W przykładzie poniżej ma to sens następujący: układ kafelków się zmienił, powstał inny prostokąt (jaki? ile ma rzędów i ile kolumn?) mimo tego, że liczba kafelków nie uległa zmianie.



2 Przyjrzyj się ułożonym wzorom z kafelków. Na wykonanie którego wzoru potrzeba więcej kafelków?

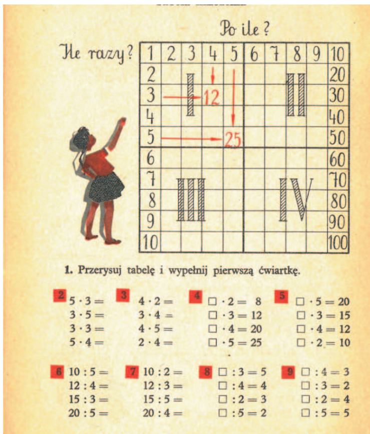
Na pierwszy wzór potrzeba tyle:
3 razy po 4 kafelki $3 \cdot 4 = 12$.
Na drugi wzór potrzeba tyle:
4 razy po 3 kafelki: $4 \cdot 3 = 12$, czyli tyle samo.

Fot. 15. Budowanie intuicji przemienności mnożenia,
Sawicka, Swoboda, 2020a, s. 92

Zadanie 2. To zadanie jest „dowodem poprzez pokaz”, że mnożenie jest przemienne. Dzieci koniecznie same muszą się o tym przekonać, układając z tych samych kafelków prostokąty opisywane mnożeniem na dwa różne sposoby. Oczywiście szybciej jest po prostu opisać prostokąt, przekręcić o 90 stopni i opisać na nowo, ale warto dać dzieciom szansę na samodzielne odkrycia!

3. Co z tabliczką mnożenia?

W starych podręcznikach jest mowa o tzw. „ćwiartkach” tabliczki mnożenia. Pierwsza ćwiartka obejmowała wyniki ograniczone wartościami czynników nie większych niż 5. Prowadziło to do sytuacji, że największa wartość iloczynu wynosiła 25. Druga ćwiartka to wyniki, w których pierwszy czynnik nie jest większy niż 5, a drugi czynnik zmienia się od 6 do 10. Stąd największa wartość iloczynu to 50. Dodatkowo, rozróżnienie nazw dla czynników na „mnożnik” i „mnożna” zakładało, że o przemienności mnożenia na tym etapie nie było mowy. Przemienność mnożenia była dyskutowana dopiero przy analizie trzeciej ćwiartki tabliczki mnożenia.

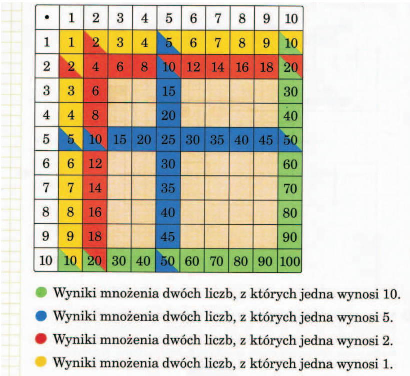


Fot. 16. Podział tabliczki mnożenia na ćwiartki, Rusiecki, Schayer, 1967, s. 50

Nie jesteśmy przekonane co do sensowności takich uporządkowań w uczeniu się wartości iloczynów. W naszej propozycji zaczynamy od mnożenia przez 10! Bazujemy przy tym na samym nazewnictwie (pięćdziesiąt to pięć dziesiątek...), na wielokrotnie analizowanej budowie tablicy 100 liczb, na przeliczaniu po 10, a nawet na budowie liczydełka dziesiątkowego, na którym łatwo wyróżnić pełne dziesiątki.

Fot. 17. Sawicka, Swoboda, 2021a, s. 69

Kolejny etap, który pozwala na łatwe znajdowanie wyników, to mnożenie przez 2 (rozumiane jako dublowanie), a potem – mnożenie, w którym jeden z czynników jest równy 5 (na przykład poprzez połowienie wyników otrzymanych jako wynik mnożenia przez 10). Takie wyniki warto znajdować i odczytywać na wszystkich ćwiartkach tabliczki mnożenia



•	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	3	6			15					30
4	4	8			20					40
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	6	12			30					60
7	7	14			35					70
8	8	16			40					80
9	9	18			45					90
10	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

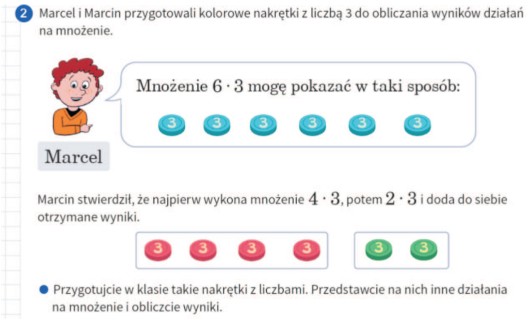
- Wyniki mnożenia dwóch liczb, z których jedna wynosi 10.
- Wyniki mnożenia dwóch liczb, z których jedna wynosi 5.
- Wyniki mnożenia dwóch liczb, z których jedna wynosi 2.
- Wyniki mnożenia dwóch liczb, z których jedna wynosi 1.

Fot. 18. Sawicka, Swoboda, 2021b

Zwróćmy uwagę, że wcale nie oczekujemy jeszcze, że dzieci będą pamiętać wyniki wszystkich iloczynów, które się do tej pory pojawiły. Ta tabela pokazuje, że do nauki tabliczki mnożenia podchodzimy wybiórczo, że staramy się znaleźć takie ścieżki, które ułatwią dzieciom posługiwanie się mnożeniem. Wciąż podkreślamy, że w nauce matematyki najważniejsze jest widzenie związków, chociaż zapamiętywanie faktów też ma wielkie znacznie. Te dwa podejścia prezentujemy w tabeli.

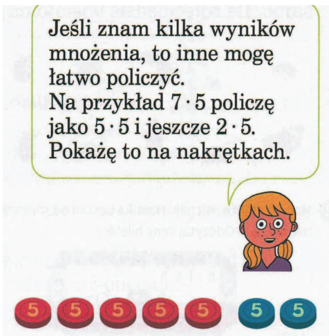
Wizualne zaprezentowanie miejsca w tabeli – gdzie znajdują się wyniki mnożenia przez 1, mnożenia przez 2, mnożenia przez 5 i mnożenia przez 10 jest jednym z zabiegów wskazującym na te związki. Zaproponowane są niektóre pytania, które można postawić przy analizowaniu tej tabeli. Takich pytań można zadać dużo więcej, to można próbować robić w klasie – dzieci same mogą tworzyć takie pytania. W ten sposób nie tylko ułatwiamy dzieciom nawigowanie po tabliczce mnożenia, wybiórcze (w dobrym tego słowa znaczeniu) odczytywanie informacji, ale utrwalamy takie własności, jak przemienność mnożenia, tworzymy intuicje rozkładu liczby na czynniki (40 to zarówno $4 \cdot 10$ jak i $10 \cdot 4$ ale i $5 \cdot 8$ i $8 \cdot 5$, a kiedyś będzie to $2 \cdot 20$ oraz $1 \cdot 40$, co wyczerpie wszystkie możliwości z dokładnością do przemienności – dlaczego?).

Inne wyniki dziecko może samo obliczyć (nie ucząc się ich na pamięć!), posługując się wyobrażeniem modelu pojemnikowego, a tak naprawdę – stosując w intuicyjny sposób prawo rozdzielności mnożenia względem dodawania. Przykład takiego zastosowania pokazuje zadanie 2.



Fot. 19. Sawicka, Swoboda, 2021b

Tego typu manipulowanie nakrętkami z zapisem liczby wielokrotnie się sprawdzało! Nakrętki czy kapsle, którymi można manipulować (rozsuwać, albo różnicować kolorystycznie) czynnościowo prezentują rozkładanie jednego czynnika na dogodne małe grupki, tak, że obliczenie czynników cząstkowych staje się wygodne. Nie ma potem problemu ze zrozumieniem, że dla otrzymania całościowego wyniki, te wyniki cząstkowe trzeba dodać do siebie. Warto jednak podkreślić, że póki co nie proponujemy formalnego zapisu prawa rozdzielności mnożenia względem dodawania – bo i po co dziecku taka wiedza?



Fot. 20. Sawicka, Swoboda, 2021b

4. Co jeszcze przed nami?

Pojęcie mnożenia jest trudne. Dlatego, realizując zasadę spiralnego nauczania matematyki, wprowadzanie uczniów w sens mnożenia warto zacząć od klasy I (a nawet wcześniej), niezależnie od tego, że podstawa programowa sugeruje klasę II. To, co zostało zaproponowane w tym artykule, to wybrane fragmenty opracowania tego zagadnienia w trakcie dwóch pierwszych lat nauki szkolnej. Podsumujmy.

- Do tej pory analizowane były trzy modele mnożenia: pojemnikowy, mnożenie jako zwielokrotnianie, aspekt czekoladowy (szeregowo-kolumnowy). Kolejne modele czekają....
- Trzeba zanalizować problem: 1 i 0 w mnożeniu.
- Prawa działań: przemienność, łączność, rozdzielność mnożenia względem dodawania.
- Porównywanie ilorazowe.
- No i pamięciowe zapamiętanie wyników mnożenia.
- I jeszcze parę innych zagadnień....

Dlatego konieczne jest dalsze omówienie zagadnień związanych z mnożeniem.

Literatura

Cydzik Z.: 1980, *Matematyka dla klasy I*, WSiP, Warszawa.

Gruszczyk-Kolczyńska E., Skura M.: 2006, *Skarbiec matematyczny. Poradnik metodyczny klasa 0 i klasy I-III*, Wydawnictwo Nowa Era, Warszawa.

Gruszczyk-Kolczyńska E.: 2012, *O dzieciach matematycznie uzdolnionych. Książka dla rodziców i nauczycieli* (red.) Edyta Gruszczyk-Kolczyńska, Wydawnictwo Nowa Era, Warszawa.

Lankiewicz B., Semadeni Z.: 1994, *Matematyka. Podręcznik dla klasy drugiej szkoły podstawowej*, WSiP, Warszawa.

Lankiewicz B., Sawicka K., Swoboda E.: 2013, *Matematyka Plus. Zeszyt 1*, Wydawnictwo Nowa Era, Warszawa.

L u d w a A., L o r e k M.: 2015, *Nasza szkoła. Matematyka, Podręcznik dla szkoły podstawowej, klasa II cześć 2.*, Ministerstwo Edukacji Narodowej, Warszawa.

P u c h a l s k a E., R y g e r M.: 1977, *Matematyka I*, Państwowe Zakłady Wydawnictw Szkolnych, Warszawa.

R u s i e c k i A.M., Z a r z e c k i A., C h w i a ł k o w s k i Z., S c h a y e r W.: 1946, *Arytmetyka I*, Państwowe Zakłady Wydawnictw Szkolnych, Warszawa.

R u s i e c k i A.M., S c h a y e r W.: 1969, *Arytmetyka I*, Państwowe Zakłady Wydawnictw Szkolnych, Warszawa.

R u s i e c k i A.M., S c h a y e r W.: 1967, *Arytmetyka II*, Państwowe Zakłady Wydawnictw Szkolnych, Warszawa.

S a w i c k a K., S w o b o d a E.: 2020b, *Wielka Przygoda, podręcznik, klasa 1 część 4*, Wydawnictwo Nowa Era Sp. z o.o, Warszawa.

S a w i c k a K., S w o b o d a E.: 2020c, *Wielka Przygoda, ćwiczenia, klasa 1 część 4*, Wydawnictwo Nowa Era Sp. z o.o, Warszawa.

S a w i c k a K., S w o b o d a E.: 2021a, *Wielka Przygoda, podręcznik, klasa 2 część 1*, Wydawnictwo Nowa Era Sp. z o.o, Warszawa.

S a w i c k a K., S w o b o d a E.: 2021b, *Wielka Przygoda, podręcznik, klasa 2 część 2*, Wydawnictwo Nowa Era Sp. z o.o, Warszawa.

T u r n a u S.: 1985, *Mnożenie i dzielenie liczb naturalnych*, w (red.) Z. Semadeni, *Nauczanie początkowe matematyki, tom 3*, Wydawnictwo Szkolne i Pedagogiczne, s. 252–258, Warszawa.

W i l k - S i w e k H., K u s i o n L.: 1995, *Błękitna Matematyka, klasa pierwsza. Zeszyt 4*, Wydawnictwo KLEKS, Bielsko-Biała.

Multiplication. How it was and how it could be

Summary

In primary education classes, the operation of multiplication is generally introduced as „abbreviated addition of equal terms”. Such approach is deeply rooted in Polish tradition, as it is evidenced by a short review of school textbooks, since the beginning of the 20th century. We consider this solution to be very bad, as in our opinion, it has various negative consequences. One of them is the fact that in this approach it seems natural to emphasize the mastery of the multiplication table by heart, what should save from mistakes while adding many elements.

A much more important, negative consequence is the blockage in further learning about the properties of multiplication (e.g. the law of commutation, the associative law, multiplication by 1 and by 0), as well as difficulties in using the concept when multiplying numbers other than natural. Therefore, it is necessary to look for other methodological solutions to introduce children into understanding what multiplication is as an operation in any numerical set.