

Wybrane przykłady trudności w uczeniu się matematyki na początku klasy czwartej z perspektywy nauczyciela

Grzegorz Kowalczyk

Szkoła Podstawowa nr 8 z Oddziałami Dwujęzycznymi
im. Jana Pawła II w Policach
gkowalczyk85@gmail.com

Streszczenie

Artykuł dotyczy szczególnie ważnej grupy problemów wynikających z trudności uczniów klas czwartych szkół podstawowych w toku edukacji matematycznej. Zawiera podstawy terminologiczne, ustalenia literaturowe na temat trudności, ze szczególnym uwzględnieniem trudności specyficznych.

Artykuł zawiera opisy wybranych przykładów trudności matematycznych, uzyskanych w toku przeprowadzonych badań diagnostycznych uczniów klas trzecich szkoły podstawowej.

Przedstawiony zarys badań, zaproponowane zestawienie o charakterze diagnostycznym i naprawczym stanowi wstęp do dalszych badań przyczyn niepowodzeń występujących masowo w klasach 4–6.

1. Terminologia specyficznych trudności

Specyficzne trudności w uczeniu się obejmują trudności *odnoszące się do uczniów w normie intelektualnej, którzy mają trudności w przyswajaniu treści nauczania, wynikające ze specyfiki ich funkcjonowania percepcyjno-motorycznego i poznawczego, nieuwarunkowane schorzeniami neurologicznymi*¹. Terminologia specyficznych trudności w uczeniu się obejmuje nie tylko specyficzne trudności w czytaniu i pisaniu, ale także specyficzne trudności w uczeniu się matematyki. Jako nauczyciel tego przedmiotu i wychowawca niejednokrotnie musiałem rozpoznawać problemy edukacyjne moich uczniów i zastosować wobec nich środki zaradcze. Zgodnie z obowiązującymi przepisami oświatowymi „nauczyciel jest obowiązany indywidualizować pracę z uczniem na obowiązkowych

¹Rozporządzenie MEN z dnia 17 listopada 2010 r. zmieniające rozporządzenie w sprawie warunków i sposobu oceniania, klasyfikowania i promowania uczniów i słuchaczy oraz przeprowadzania sprawdzianów i egzaminów w szkołach publicznych.

i dodatkowych zajęciach edukacyjnych, odpowiednio do jego potrzeb rozwojowych i edukacyjnych oraz możliwości psychofizycznych ucznia”². Dzięki współpracy z rodzicami, nauczycielami uczącymi w danej klasie oraz pedagogiem szkolnym uczniowie kierowani byli na badania do poradni psychologiczno-pedagogicznej. Opinie i zawarte w nich konkretne zalecenia do pracy z uczniem pozwalały na zaplanowanie procesu dydaktycznego z uwzględnieniem indywidualnych potrzeb i możliwości dzieci.

Próby zdefiniowania trudności w uczeniu się matematyki przez dzieci sięgają lat sześćdziesiątych XX w. W literaturze występuje duża różnorodność w zakresie pojęć stosowanych do ich opisu. W naukach pedagogicznych, a także psychologii edukacyjnej, zajmującej się wyjaśnianiem mechanizmu opisywanych zmian w powiązaniu z poziomem kształcenia i metodami nauczania, można spotkać termin *difficulties* (trudności, niepowodzenia). W naukach psychologicznych powiązanych z naukami medycznymi rozpowszechnione jest pojęcie *disorder* (zaburzenie). U badaczy reprezentujących podejście poznawcze i rozwojowe stosowany jest termin *disability* (zaburzona zdolność, dysfunkcja, upośledzenie), natomiast w neuropsychologii – *developmental dyscalculia* (dyskalkulia rozwojowa).

2. Dyskalkulia rozwojowa

W roku 1974 pojawiła się jedna z pierwszych definicji dyskalkulii rozwojowej autorstwa słowackiego neuropsychologa Ladislava Košča (1982: 23). **Dyskalkulia rozwojowa** jest strukturalnym **zaburzeniem zdolności matematycznych**, mającym swe źródło w genetycznych lub wrodzonych nieprawidłowościach tych części mózgu, które są bezpośrednim anatomiczno-fizjologicznym podłożem dojrzewania zdolności matematycznych zgodnie z wiekiem; **jest zaburzeniem występującym bez jednoczesnego zaburzenia ogólnych funkcji umysłowych**. L. Košč wyróżnia sześć form dyskalkulii rozwojowej (1982: 26):

- **dyskalkulia werbalna** (*verbal dyscalculia*) – przejawia się zaburzeniem umiejętności słownego wyrażania pojęć i uchwycenia za-

²Rozporządzenie MEN z dnia 30 kwietnia 2007 r. w sprawie warunków i sposobu oceniania, klasyfikowania i promowania uczniów i słuchaczy oraz przeprowadzania sprawdzianów i egzaminów w szkołach publicznych (Dz. U. Nr 83, poz. 562 z późn. zm.).

leżności matematycznych, takich jak oznaczenie ilości i kolejności przedmiotów, nazywanie cyfr i liczebników, symboli działań i dokonań matematycznych, na przykład brak zdolności utożsamiania ilości z odpowiadającą jej liczbą;

- **dyskalkulia praktognostyczna** (*practognostic dyscalculia*) – przejawia się trudnościami w manipulowaniu przedmiotami narysowanymi na papierze, na ekranie komputera czy trzymanymi w dłońmi (kostkami do gry, patyczkami, piłkami, wielokątami). Manipulacje obejmują liczenie (pojedyncze dodawanie) przedmiotów oraz porównywanie wielkości czy ilości (bez ich dodawania). Uczeń nie jest w stanie ułożyć na przykład kostek lub patyczków według ich wielkości. Nie umie wskazać, który z dwóch patyczków jest grubszy, cieńszy czy tego samego wymiaru;
- **dyskalkulia leksykalna** (*lexical dyscalculia*) – związana jest z brakiem lub znacznym ograniczeniem umiejętności czytania symboli matematycznych (liczb, znaków działań matematycznych, zapisanych operacji matematycznych, liczb wielocyfrowych – szczególnie jeżeli mają więcej niż jedno zero w środku, ułamków, potęg, pierwiastków, liczb dziesiętnych). W niektórych przypadkach dziecko zmienia podobne wyglądem cyfry (3–8, 6–9), albo odczytuje w odwrotnym kierunku liczby dwucyfrowe (23 jako 32);
- **dyskalkulia graficzna** (*graphical dyscalculia*) – jest to niezdolność zapisywania symboli matematycznych, analogicznie do dyskalkulii leksykalnej. Uczeń nie jest w stanie napisać dyktowanych liczb, napisać nazw liczb, a nawet ich skopiować. Dziecko ma trudności z napisaniem liczb dwu- czy trzycyfrowych, pisze je niezgodnie z poleceniem, izolując pojedyncze elementy (tysiąc dwieście osiemdziesiąt cztery pisze jako 1000, 200, 80 i 4);
- **dyskalkulia ideognostyczna** (*ideognostical dyscalculia*) – to przede wszystkim niezdolność zrozumienia pojęć i zależności matematycznych oraz wykonania obliczeń w pamięci. W cięższych przypadkach tego typu dyskalkulii człowiek nie jest zdolny do wykonania w pamięci najłatwiejszych nawet obliczeń. Często uczeń jest

w stanie przepisać lub przeczytać liczby, lecz nie rozumie, co przeczytał lub napisał (wie, że 9 to dziewięć i że 9 należy zapisać jako 9, ale nie wie, że 9 to to samo co $10 - 1$, albo 3×3 czy połowa z 18);

- **dyskalkulia operacyjna** (*operational dyscalculia*) – to bezpośrednie zaburzenie zdolności do wykonywania operacji matematycznych. Typowym przykładem jest zamienianie operacji, na przykład wykonywanie dodawania zamiast mnożenia, odejmowania zamiast dzielenia, jak również obliczenia sposobem pisemnym przykładów, które łatwo można wykonać w pamięci, czy liczenie na palcach, gdy zadanie łatwo można rozwiązać pamięciowo. Zastępowanie bardziej skomplikowanej czynności prostszą, na przykład: $21 + 21 = (20 + 20) + (1 + 1)$; $4 \cdot 3 = 3 + 3 + 3 + 3$.

Trudności w uczeniu się matematyki opisywane są w międzynarodowych klasyfikacjach zaburzeń i chorób: **amerykańskiej DSM-5**³ oraz **europejskiej ICD-10**⁴. DSM-5 nr 315.1 to *zaburzenie matematyczne* (*mathematics disorder*) dotyczące: posługiwania się pojęciem liczby, zapamiętywania faktów matematycznych, poprawnego i płynnego liczenia, poprawnego rozumowania matematycznego. Uczniowie z zaburzeniem matematycznym mają problemy z rozwojem umiejętności matematycznych. Ich umiejętności matematyczne są znacznie poniżej normy, uwzględniając wiek ucznia, jego poziom inteligencji i wykształcenie (M. Kurczab, P. Tomaszewski, 2005: 13). ICD-10 nr F81.2 to **specyficzne zaburzenie umiejętności arytmetycznych** (*specific disorder of arithmetical skills*). Zaburzenie to obejmuje specyficzne upośledzenie umiejętności arytmetycznych, które nie da się wyjaśnić wyłącznie ogólnym upośledzeniem umysłowym lub nieadekwatnym procesem nauczania. Upośledzenie to dotyczy raczej podstawowych umiejętności rachunkowych: dodawania, odejmowania, mnożenia, dzielenia niż bar-

³DSM-5 (*Diagnostic and Statistical Manual of Mental Disorders*) – kolejna edycja klasyfikacji zaburzeń psychicznych Amerykańskiego Towarzystwa Psychiatrycznego, która została opublikowana 18 maja 2013 r.

⁴ICD-10, Międzynarodowa Statystyczna Klasyfikacja Chorób i Problemów Zdrowotnych ICD-10 (*International Statistical Classification of Diseases and Related Health Problems*). ICD-10 jest opracowana przez Światową Organizację Zdrowia i obowiązuje w Polsce od roku 1996.

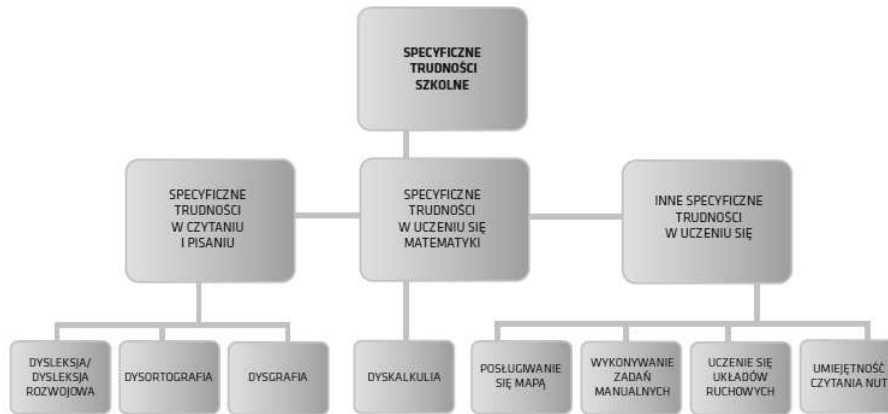
dziej abstrakcyjnych umiejętności matematycznych potrzebnych do algebry, trygonometrii, geometrii, rachunku różniczkowego lub całkowego (Kurczab, Tomaszewski, 2005: 12).

Zgodnie z klasyczną definicją L. Košča oraz proponowanymi aktualnie przez DSM-5 i ICD-10 przyjmuje się, iż **dyskalkulia rozwojowa** obejmuje specyficzne zaburzenia zdolności arytmetycznych, rozpoznawane na podstawie analizy deficytów poznawczych ujawnionych przez dziecko w kontekście prawidłowego rozwoju intelektualnego i sprzyjających warunkach edukacyjnych (U. Oszwa, 2005: 27).

3. Rodzaje trudności w uczeniu się matematyki

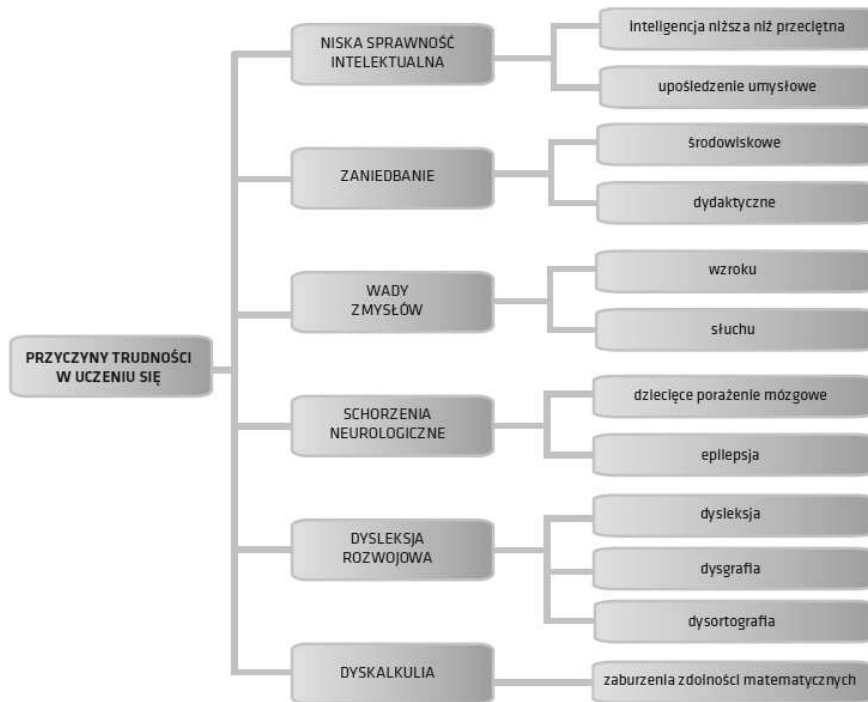
W polskiej literaturze psychopedagogicznej od lat osiemdziesiątych funkcjonuje określenie „specyficzne trudności w uczeniu się matematyki” (E. Gruszczyk-Kolczyńska, 1992: 7) (*specific difficulties in learning mathematics*). Przymiotnik „specyficzne” oznacza ich wąski zakres, gdy trudności występują przy prawidłowym rozwoju intelektualnym dziecka. Użycie określenia **specyficzne trudności w uczeniu się matematyki** nie może być jednoznacznie rozumiane jako dyskalkulia (A. Marzec, C. Tuszyńska-Skubiszewska, 2012a: 2). Specyficzne trudności w uczeniu się matematyki obejmują również szereg trudności uwarunkowanych zaburzeniami sfery poznawczej ucznia. Wśród trudności w uczeniu się można wyróżnić:

- specyficzne, dotyczą uczniów, u których stwierdzono prawidłowy rozwój umysłowy. Trudności te diagnozuje się, jeśli niepowodzenia szkolne dotyczą tylko niektórych zakresów uczenia się. Przyczyną specyficznych trudności w uczeniu się jest nieharmonijny rozwój psychoruchowy, który przejawia się opóźnieniem rozwoju określonych funkcji: wzrokowo-przestrzennych, słuchowo-językowych, motorycznych. Zaburzenia umiejętności matematycznych wywodzą się z nieprawidłowości przebiegu procesów poznawczych, nie są zaś wywołane obniżonymi możliwościami intelektualnymi;



Rys. 1. Podział specyficznych trudności szkolnych

Źródło: A. Marzec, C. Tuszyńska-Skubiszewska



Rys. 2. Przyczyny trudności w uczeniu się

Źródło: A. Marzec, C. Tuszyńska-Skubiszewska

- niespecyficzne, dotyczą dzieci z inteligencją niższą niż przeciętna, występują z uwagi na niepełnosprawność intelektualną, dysfunkcję narządów zmysłu (na przykład niepodlegająca korekcji wada wzroku czy słuchu), mogą być skutkiem schorzeń neurologicznych (epilepsja, mózgowie porażenie dziecięce). Niespecyficzne trudności mogą również wynikać z zaniedbań środowiskowych czy pedagogicznych (M. Bogdanowicz, A. Adryjanek, 2005: 14–26).

Z kolei E. Gruszczyk-Kolczyńska wyróżnia: **trudności zwyczajne**, które towarzyszą uczniowi przez cały czas nauki, na każdym etapie edukacyjnym⁵, **trudności nadmierne**, pojawiające się często z winy dorosłych⁶, **trudności specyficzne** dotyczą dzieci, które pomimo włożonego wysiłku nie mogą samodzielnie poradzić sobie nawet z łatwym zadaniem. Dzieci te często nie rozumieją sensu matematycznego i zależności pomiędzy liczbami. Brak im odporności emocjonalnej, nie potrafią wytrzymać napięcia, które towarzyszy podczas rozwiązywania zadań matematycznych. Przy obniżonej sprawności manualnej dzieci często mają trudności z narysowaniem grafu czy zapisaniem działania matematycznego (Gruszczyk-Kolczyńska, 1997: 6, 2009: 22–25).

3.1. Problem trudności w Polsce i w innych krajach

Raport OECD⁷ z roku 2012⁸ na temat umiejętności 15-latków w matematyce, naukach ścisłych i czytaniu ukazuje bardzo zróżnicowane wyniki państw członkowskich. W całej UE uczniowie mają poważne braki w matematyce, ale sytuacja wygląda lepiej w naukach ścisłych i czytaniu. W tych dziedzinach przyjęto na 2020 r. cel, który zakłada obniżenie odsetka uczniów uzyskujących słabe wyniki do mniej niż 15%.

⁵Trudności zwyczajne – dziecko potrafi pokonać trudności samodzielnie lub przy niewielkiej pomocy ze strony osoby dorosłej. Najważniejsze jest, aby wysiłek umysłowy towarzyszący pokonywaniu trudności zwyczajnych nie przekraczał możliwości intelektualnych ucznia.

⁶Np. gdy nauczyciel przecenia wiedzę i możliwości poznawcze ucznia, gdy wymaga od dziecka więcej, niż ono jest w stanie wykonać, dając do rozwiązania zbyt trudne zadania, niedostosowane do poziomu wiedzy i możliwości intelektualnych ucznia.

⁷Organizacja Współpracy Gospodarczej i Rozwoju (OECD) jest ważną międzynarodową, międzyrządową organizacją gospodarczą, skupiającą 34 wysoko rozwinięte państwa, w tym od listopada 1996 r. – Polskę.

⁸<http://eurofundsnews.eu/edukacja/raport-oecd-na-temat-umiejetnosci-15-latkow/> [dostęp 15.11.2017].

W raporcie (P. Bogacz, 2017) stwierdzono, że począwszy od 2009 r. dziesięć państw członkowskich (Bułgaria, Czechy, Niemcy, Estonia, Irlandia, Chorwacja, Łotwa, Austria, Polska oraz Rumunia) poczyniły znaczące postępy w zmniejszaniu odsetka uczniów uzyskujących słabe wyniki we wszystkich trzech podstawowych umiejętnościach. W pięciu państwach UE (Grecja, Węgry, Słowacja, Finlandia, Szwecja) odnotowano jednak wzrost odsetka uczniów ze słabymi wynikami. Pozostałe państwa członkowskie osiągnęły mieszane rezultaty. Ogólnie rzecz biorąc, UE radzi sobie nieco lepiej niż Stany Zjednoczone, ale jeszcze lepsze wyniki osiąga Japonia.

Badanie PISA przeprowadzane jest co trzy lata, począwszy od roku 2000. W badaniu z 2012 r. uczestniczyły wszystkie 34 państwa członkowskie OECD oraz 31 państw partnerskich, które w sumie stanowią ponad 80% światowej gospodarki. Około 510 tys. uczniów w wieku od 15 lat i trzech miesięcy do 16 lat i dwóch miesięcy wzięło udział w testach z matematyki, czytania i nauk ścisłych, ze szczególnym naciskiem na matematykę. Od 2009 r. nie odnotowano poprawy w zakresie odsetka uczniów ze słabymi wynikami na poziomie całej UE. Niemniej jednak cztery państwa członkowskie (Estonia, Finlandia, Polska, Holandia) znalazły się w światowej czołówce państw, w których odsetek uczniów uzyskujących słabe wyniki w matematyce wynosi poniżej unijnego benchmarku 15%. Żadne inne państwo członkowskie nie osiągnęło jeszcze tego poziomu. Duże postępy (wzrost o ponad dwa punkty procentowe) odnotowano w przypadku Bułgarii, Estonii, Irlandii, Chorwacji, Łotwy, Austrii, Polski oraz Rumunii.

Słabe osiągnięcia w matematyce są powszechnym problemem w wielu krajach europejskich. Wiąże się on nie tylko ze skutecznością nauczania i kształcenia, ale także z zapewnieniem sprawiedliwego systemu edukacji. Na sposoby nauczania i uczenia się matematyki ma wpływ szereg czynników. Międzynarodowe badania⁹ potwierdzają, że wyniki uczniów zależą od sytuacji rodzinnej, jakości nauczania, a także struktury i organizacji systemów edukacji. Analizy zostały opracowane przez sieć *Eury-*

⁹Słabe wyniki w matematyce i naukach ścisłych nadal problemem w Europie. Komisja Europejska – komunikat prasowy, http://europa.eu/rapid/press-release_IP-11-1358_pl.htm [dostęp 17.11.2017].

*dice*¹⁰ (unijnej agendy badającej systemy edukacyjne). Skoncentrowano się w nich na reformach programów nauczania oraz metodach nauczania i oceny. Poruszono w nich także temat słabych wyników w nauce i zwiększania motywacji poprzez położenie nacisku na praktyczne zastosowania i kształcenie nauczycieli. Jakie wnioski wynikają z tego raportu? W szkołach podstawowych i gimnazjach brakuje odrębnych metod wykładania matematyki w takich obszarach, jak zdobywanie podstawowych umiejętności matematycznych i poznawanie schematów działania. Anachroniczny jest system wyjaśniania zasad i pojęć matematycznych. Ogólnikowo potraktowane są takie dziedziny, jak stosowanie matematyki w kontekście realnych, życiowych sytuacji czy rozumowanie matematyczne. Program nauczania pobieżnie traktuje także kwestie dotyczące komunikatywności języka matematycznego. Problemem jest też wykorzystanie komputerów w procesie kształcenia matematycznego.

Matematyka już w szkole podstawowej wielu dzieciom sprawia trudności. Wiadomo, że może mieć na to wpływ wiele czynników. Jednak pozostawienie bez „opieki matematycznej” dziecka powoduje, że problem narasta wraz z kolejnym etapem edukacyjnym. Taka sytuacja w Polsce występuje, a widać to chociażby po analizie wyników egzaminów maturalnych z matematyki w ostatnich latach. Matematyka od 2010 r. jest obowiązkowa na egzaminie dojrzałości. W roku 2015 wśród zdających w nowej formule, czyli absolwentów liceów, egzamin pisemny z matematyki zdało 82% maturzystów. Oznacza to, że matury z matematyki na poziomie podstawowym nie zdało 18% maturzystów. Wśród zdających w starej formule, czyli absolwentów techników, egzamin pisemny z matematyki zdało 70% maturzystów. Średnie wyniki procentowe na poziomie podstawowym oraz na poziomie rozszerzonym wyniosły odpowiednio 55% i 41% i nie odbiegają od wyników w poprzednich latach¹¹. W 2015 r. maturę z matematyki ogółem zdało 76% absolwentów,

¹⁰EURYDICE Nauczanie matematyki w Europie: ogólne wyzwania i strategie krajowe, EACEA, Warszawa 2012, str. 81. Dostępny w Internecie: http://eacea.ec.europa.eu/education/eurydice/documents/thematic_reports/132PL.pdf [dostęp 17.11.2017].

¹¹Dostępny w Internecie: https://www.cke.edu.pl/images/_EGZAMIN_MATURALNY_OD_2015/Informacje_o_wynikach/2015/sprawozdanie/Sprawozdanie_matematyka_2015.pdf [dostęp 6.09.2016].

czyli prawie 1/4 maturzystów potknęła się na egzaminie z matematyki. W roku 2016 w liceach egzamin pisemny z matematyki zdało 87% maturzystów (średni wynik na obowiązkowym poziomie podstawowym to 61%, na rozszerzonym wybieranym tylko przez chętnych 40%). W technicach zaś egzamin pisemny z matematyki zdało 75% maturzystów (średni wynik na obowiązkowym poziomie podstawowym to 46%, na rozszerzonym wybieranym tylko przez chętnych 13%)¹². Najtrudniejsza, jak w roku ubiegłym, znowu okazała się matematyka. Egzamin ogółem zdało 83% absolwentów, oblało 17% uczniów (13% w liceach, 25% w technicach), czyli prawie 1/5 maturzystów. Zarówno w roku 2015 i 2016 oraz w latach ubiegłych widać, że najwięcej problemów maturzystom przysparza matematyka. To powoduje, że uczniowie boją się obowiązkowej matury z matematyki. U. Osza (2008) przedstawia rezultaty badań w polskich szkołach, w zakresie stopnia nasilenia trudności matematycznych u uczniów w klasach szkolnych. Problemy z matematyką zazwyczaj nie pojawiają się nagle, ale są wynikiem długotrwałego procesu, w ciągu którego na bezpośrednie przyczyny niepowodzeń nakładają się przyczyny wtórne. W każdej klasie są uczniowie mający trudności w uczeniu się matematyki – najczęściej jest to około 25% ogółu. Na szczególne podkreślenie zasługują zaprezentowane badania dzieci przejawiających różne stopnie trudności w uczeniu się matematyki w klasach „zerowych”; 1–3; 4–6 oraz z klas gimnazjalnych. Badania wskazują, że najpoważniejszymi konsekwencjami niepowodzeń szkolnych w opinii nauczycieli są: fobie szkolne, wagary, lęk przed grupą rówieśniczą, zaniżona samoocena, niechęć do nauki, słaba motywacja do nauki oraz niskie oceny szkolne. Nauczyciele podejmują różnorodne sposoby pomocy skierowane do uczniów z trudnościami w nauce matematyki. Za najbardziej efektywny sposób zapobiegania trudnościom uznawane jest przez nauczycieli rozwijanie myślenia operacyjnego.

Przybywa również uczniów z opiniami poradni psychologiczno-pedagogicznej. Wskazują na to m.in. dane Szkoły Podstawowej w Policach¹³,

¹²Dostępny w Internecie: <http://wiadomosci.onet.pl/kraj/matura-2016-wstepne-wyniki-egzaminu/7zvb69> [dostęp 6.09.2016].

¹³Dane pochodzą od pedagoga szkolnego Szkoły Podstawowej nr 8 im. Jana Pawła II w Policach. *Sytuacja szkolna i domowa uczniów klas IV–VI Szkoły Podstawowej nr 8 im. Jana Pawła II w Policach.*

w której uczę, dotyczące bilansów II semestru roku szkolnego 2014/2015 oraz 2015/2016. W roku szkolnym 2014/2015 uczniów z opiniami w klasach 4–6 było 126 na 452, co stanowi 28%. Natomiast w roku szkolnym 2015/2016 uczniów z opiniami było 156 na 454, co stanowi 34%. Przytoczę fragment opinii jednej z moich uczennic klasy 4 z ryzykiem wystąpienia dyskalkulii. Uczennica została skierowana do poradni przez szkołę z powodu trudności w nauce matematyki w klasach 1–3. Z opinii wychowawcy wynikało, że „dziewczynka miała problem z dodawaniem, odejmowaniem, liczeniem na konkretach”.

[...] *Zaburzona jest wyobraźnia i orientacja przestrzenna. Na poziomie niskim przebiega myślenie operacyjne (umiejętność dokonywania operacji arytmetycznych w pamięci). Słabiej funkcjonujące obszary psychiczne mogą być przyczyną zgłaszanych trudności w nauce liczenia. Badanie pedagogiczne przeprowadzone u dziewczynki wykazało niski poziom kompetencji matematycznych. Trudności w nauce matematyki mają charakter specyficzny. Dziewczynka popełnia błędy w przeliczaniu elementów, gdy jest ich większa ilość. Rozumie istotę działań matematycznych. Wykonuje je na konkretach (np. liczy na koralikach, liczydle), co wydłuża czas pracy. Nie umie liczyć w pamięci. Nie jest wdrożona do liczenia na palcach. Nie umie przekraczać progu dziesiętkowego metodą dopełniania do dziesięciu. Odczytuje w miarę płynnie tekst zadań tekstowych, ale nie rozumie ich matematycznego sensu. Jako rozwiązania podaje zazwyczaj formułę dodawania. Poprawnie szacuje wartości liczbowe przy porównywaniu ilości, jednak nie umie obliczyć o ile jest więcej lub o ile mniej. Myli matematyczne znaki większości i mniejszości. Nie umie porządkować liczb w kolejności rosnącej lub malejącej. Nie zna struktury liczb dwucyfrowych – myli liczbę dziesiątek i jedności. Nie umie rozkładać liczb na składniki, ma trudności z dopełnianiem do danej liczby. Test rozumowania matematycznego wykazał, że dziewczynka nie umie podwajać liczb ani rozdzielać elementów na połowę. Nie odnajduje pozycji liczb na osi liczbowej. Dziewczynka podaje liczbę następną od wskazanej i liczy werbalnie w przód w zakresie stu. Ma trudności w liczeniu w tył.*

W dalszej części artykułu pokażę trudności tego dziecka w uczeniu się matematyki i rozwiązywaniu zadań wynikające z tej dysfunkcji (rozdział 5.2) oraz proponowaną pomoc w oparciu o wskazania poradni psychologiczno-pedagogicznej (rozdział 8).

4. Specyficzne trudności w uczeniu się matematyki

Dobrze, jeżeli uczniowie stopniowo samodzielnie pokonują napotkane trudności. Istnieje jednak kategoria dzieci, które o własnych siłach nie są w stanie poradzić sobie z tym problemem, potrzebują pomocy specjalistycznej. Mówi się o nich, że przejawiają specyficzne trudności w uczeniu się matematyki. I te trudności specyficzne są związane z osobą dziecka. Badania nad przyczynami niepowodzeń, nadmiernych i specyficznych trudności w uczeniu się matematyki podjęła już ponad 30 lat temu E. Gruszczyk-Kolczyńska. W dalszym ciągu trwają prace nad ustaleniem rzeczywistych przyczyn nadmiernych i specyficznych trudności w uczeniu się matematyki.

Trudności specyficzne – odwołując się do filmu z wykładu E. Gruszczyk-Kolczyńskiej pt. *O zwyczajnych, nadmiernych i specyficznych trudnościach w uczeniu się matematyki*¹⁴ – wynikają również z faktu, że szkoła ciągle funkcjonuje wg następującego schematu J.A. Komeńskiego:

- „wszyscy tego samego” – jedna podstawa programowa dla wszystkich uczniów i jeden program nauczania wybrany przez nauczyciela, który dzieci muszą realizować. Oznacza to, że dzieci muszą opanować wiadomości i umiejętności zawarte w wybranym programie nauczania;
- „wszyscy tak samo” – nauczyciel do wybranego programu wybiera pakiet edukacyjny (podręcznik), w którym są te same zadania do rozwiązania dla wszystkich dzieci w danej klasie. Poza tym nauczyciel mówi do dzieci w taki sam sposób, prowadząc lekcje i podając im do rozwiązania takie same zadania. A zatem dzieci muszą uczyć się tak samo;
- „wszyscy w tym samym czasie” – tego wymaga organizacja toku nauczania. Nauczyciel ma niewiele czasu na czynności organizacyjne przed przystąpieniem do części właściwej lekcji. A przecież są różnice indywidualne w tempie rozwoju umysłowego dziecka.

Wiadomo z literatury pedagogicznej, że różnica w tempie rozwoju dzieci rozpoczynających naukę w szkole wynosi 4 lata, czego dowodzą badania wg obliczeń L. Wołoszynowej z 1977 r. (Gruszczyk-Kolczyńska,

¹⁴Film nagrany podczas IX Konferencji Naukowej Dydaktyków Matematyki w Poberowie, 2014.

1994: 48). Oznacza to, że w każdej klasie pierwszej (wcześniej siedmiolatków), uczą się dzieci, które są dojrzałe i pewne intelektualnie, ale też i takie, które są słabiutkie w kontaktach i niedojrzałe emocjonalnie w rozumowaniu.

Tak wielkie różnice indywidualne wyjaśniają jedną z przyczyn niepowodzeń w uczeniu się matematyki. Szkoła w systemie klasowo-lekcyjnym jest ustawiona i „zaprojektowana” na poziom średni, na przeciętny poziom rozumowania i działalności dziecka. Oznacza to, że dla mniej więcej 25% dzieci w klasie materiał z matematyki realizowany przez nauczyciela jest za trudny i również jest mniej więcej tyle samo dzieci, dla których ten materiał okaże się łatwy. To samo twierdzi E. Gruszczyk-Kolczyńska we wspomnianym wykładzie. W Polsce błędnie przyjmuje się jednak (nie patrząc na różnice indywidualne), że metryka dziecka jest najważniejsza, tzn. uważa się, że dziecko siedmioletnie jest już gotowe do podjęcia nauki. Natomiast – jak się okazuje i wynika to z różnic indywidualnych – nawet dziecko ośmioletnie wcale jeszcze nie musi iść do szkoły.

Specyficzne trudności nazywają się też tak dlatego, że są one przypisane danemu dziecku, są specyficzne dla niego. Doświadczają ich te dzieci, które nie potrafią skupić na tyle uwagi, żeby wysłuchać całego zadania. W odpowiednim czasie nie są w stanie wykonać najprostszych poleceń danych przez nauczyciela. Nie potrafią też nadażyć z odwzorowaniem, a także udzielić odpowiedzi na zadane pytania, tak jak ze chce tego nauczyciel. Jak wynika z badań E. Gruszczyk-Kolczyńskiej, „pod koniec I klasy i na początku klasy II co czwarte dziecko ma kłopoty z matematyką. W klasie III co trzecie dziecko nie potrafi już sprostać wymaganiom z tego podstawowego przedmiotu, a w klasach starszych jest jeszcze gorzej” (Gruszczyk-Kolczyńska, 1989: 8). Te proporcje w polskich szkołach dalej się nie zmieniają, czego dowodem są ostatecznie wyniki chociażby egzaminów gimnazjalnych albo matur. Tych specyficznych trudności dziecko nie jest w stanie samodzielnie pokonać i na przyczyny pierwotne bardzo szybko nakładają się przyczyny wtórne. Wiele dzieci wręcz boi się lekcji matematyki, czuje niechęć do tego przedmiotu. Dziecko obserwuje nauczyciela na lekcji i widzi, że jego reakcja jest różna – do jednych dzieci nauczyciel częściej się uśmiecha, prowadzi z nimi pogadankę, a z innymi już nie. Często nagradza wciąż te same dzieci za poprawną odpowiedź, innych uczniów nie za-

uważając. Dziecko takie bardzo szybko traci motywację do nauki, odwzorowuje do zeszytu tylko to, co zapisał na tablicy nauczyciel lub inni uczniowie, odpisuje zeszyty i zeszyty ćwiczeń, nie próbując zrozumieć, o co chodzi. Tego rodzaju zachowania powodują blokadę w nabywaniu wiadomości i umiejętności matematycznych. Dziecko traci wtedy motywację do zdobywania wiedzy matematycznej, unika podejmowania i rozwiązywania zadań matematycznych, a w rezultacie dociera do niego mniejsza ilość doświadczeń logicznych, przez co tempo jego rozwoju umysłowego zostaje zwolnione. Po pewnym czasie uczeń taki przestaje lubić szkołę i wszystko, co z nią związane, nie chce się uczyć nie tylko matematyki, ale też i innych przedmiotów. Maleją jego możliwości intelektualne¹⁵. Wszystko to sprawia, że dzieci zmieniają nastawienie do szkoły, nie chcą do niej chodzić, uciekają z lekcji itp. Powodem lęków przed matematyką i niechęci do tego przedmiotu są głównie trudności i związane z nimi niepowodzenia, doznawane w pierwszych klasach szkoły podstawowej (Marek Pisarski, 2011: 15). Powoduje to blokady w uczeniu się matematyki ze wszystkimi ich konsekwencjami. Te konsekwencje bardzo wyraźnie zaznacza E. Gruszczyk-Kolczyńska (1994: 138) i są to:

- reakcje obronne przed samodzielnym rozwiązywaniem zadań wymagających od dzieci wysiłku intelektualnego;
- przecenianie stopnia trudności zadań szkolnych, lękowe wycofywanie się i rezygnacja z ich rozwiązywania;
- mała odporność emocjonalna na sytuacje trudne i poddawanie się frustracji przy niewielkim stopniu trudności zadania;
- słabo ukształtowane nawyki kierowania swym zachowaniem w racjonalny sposób;
- ograniczenia w zakresie funkcjonowania na poziomie symbolicznym i przechodzenia z jednego poziomu reprezentacji na inny;
- obniżony poziom operacyjnego rozumowania w sensie Piageta;
- niski poziom opanowania technik szkolnych (czytanie, pisanie) i żenująco niski poziom wiadomości i umiejętności matematycznych, tych nabywanych w szkole.

Co ważne i wynika to także z badań autorki, takie specyficzne trudności pojawiają się zaraz na początku roku szkolnego. Bardzo często –

¹⁵http://www.lcre-lomza.webd.pl/sodmidn.webd.pl/pdf/BRAK_DOJRZAŁOSCI_MATEMATYCZNEJ_JAKO_PRZYCZYNA_TRUDNOSCI_W_NAUCE_I_POSLUGIWANIU_SIE_MATEMATYKA.pdf

o czym mówi E. Gruszczyk-Kolczyńska – nauczyciele klas 1–3 „nie wyłapują” na tym etapie nauczania tych problemów u dzieci lub uważają je jeszcze za błahe. Zgodnie z teorią Piageta (1966) czynniki ryzyka dyskalkulii można wyodrębnić dopiero w wieku 8–9 lat, kiedy to dziecko powinno zakończyć podokres wyobrażeń przedoperacyjnych i wkroczyć w okres rozumowania na poziomie operacji konkretnych. Jak uważa U. Oszwa, jest to jednak stosunkowo późny wiek dla wstępnego rozpoznania specyficznych trudności w uczeniu się matematyki (Oszwa, 2008: 53). Najczęściej jednak dopiero w czwartej klasie okazuje się, że są dzieci z takimi problemami. Są one bardzo poważne, gdyż okazuje się, że opanowane przez uczniów wiadomości i umiejętności z matematyki sięgają niespełna klasy pierwszej. Blokada w uczeniu się matematyki stała się tak ogromna, że dzieci zatrzymały się na etapie klasy pierwszej, mimo stałej obecności w szkole. Inną przyczyną niepowodzeń jest sposób nauczania matematyki w klasach 1–3. Przykładem może być nauka dodawania $8 + 5$.

Chociaż dzieci wiedzą, że to 13, potrafią to policzyć (już w klasie pierwszej) na swój sposób, to najczęściej używają zapisów typu: $8 + 5 = 8 + (2 + 3) = (8 + 2) + 3 = 10 + 3 = 13$. Podobnie jest przy odejmowaniu. Często dzieci te przekształcenia symboliczne robią wtedy, kiedy jeszcze nie potrafią takich przekształceń robić i nie widzą w tym sensu. A przecież uczniowie w tym wieku doliczają już i odliczają w sposób naturalny. Dość krytycznie wypowiada się także E. Gruszczyk-Kolczyńska o zeszytach ćwiczeń. Wśród materiałów edukacyjnych używanych w klasach 1–3 w polskich szkołach nadmierną rolę zaczęły pełnić zeszyty ćwiczeń i kserowane materiały. Opisuje ona trafnie podstawową wadę takiego podejścia: to, co powinno być aktywnością dziecka na prawdziwych konkretach (patyczki, klocki itp.), którymi można manipulować, zostaje zastąpione – wbrew współczesnej psychologii rozwojowej – przez oglądanie statycznych rysunków i uzupełnianie abstrakcyjnych schematów graficzno-symbolicznych (dobrze znanych nauczycielom, np. okienek i grafów, lub wymyślonych przez autorów do jednorazowego zastosowania), które najczęściej służą do wpisywania w puste pola znaków $+$, $-$, $=$, $>$, $<$, nie ucząc matematyzacji, czyli całego procesu sytuacji zadaniowej, w której dziecięcy umysł przetwarza czynności na znaki działań i na zapis liczbowy oraz buduje z tego strukturę, którą jest dzia-

łanie. E. Gruszczyk-Kolczyńska nazywa to „papierowym sposobem prowadzenia edukacji matematycznej” (Z. Semadeni, 2016: 17).¹⁶ Ponadto w wielu zeszytach ćwiczeń pojawiają się błędy, szczególnie w zadaniach dotyczących odejmowania, ale i nie tylko.

Z badań E. Gruszczyk-Kolczyńskiej (1994: 49) nad zjawiskiem niepowodzeń w uczeniu się matematyki wynika, że jeżeli dziecko przez trzy lata (klasy 0–1–2) potrafi sprostać wymaganiom, można z dużą pewnością przyjąć, że i później nie będzie miało większych kłopotów. Nie może jednak opuszczać lekcji matematyki i musi samodzielnie odrabiać zadania, a sposób nauczania matematyki w szkole powinien być prawidłowy. E. Gruszczyk-Kolczyńska podkreśla, że najgorsze są przyczyny wtórne, bowiem biją one w samoocenę i osobowość dziecka. Angielski matematyk W.W. Sawyer (1974: 63–64) uważa, że „matematyką – podobnie jak muzyką – interesowałaby się przypuszczalnie większość ludzi, gdyby się jej nie obawiano. Zainteresowanie wiąże się bardzo ściśle z ufnością we własne siły. Jeśli czujemy, że coś potrafimy zrobić, jesteśmy z siebie zadowoleni. Lubimy poczucie, że udało nam się pokonać przeszkodę i poczucie, że inni patrzą na nas z uznaniem. Chcemy nadal to robić, a im więcej się tym zajmujemy, tym sprawniej nam to idzie. Skutki bywają odwrotne, gdy rozpoczynamy od niepowodzeń”. Również badania prowadzone przez psychologa H. Spionek (1973) wykazują, że po trzech latach podążania ścieżką klęski szkolnej następuje ubytek w pomiarze inteligencji tak znaczący, że już mocno daje się go zauważyć. Następuje obniżenie sprawności intelektualnej i to obniżenie tak mocne, że widać regres u dziecka (badania na podstawie testów). H. Spionek (1981) wykazuje, że wskutek długotrwałych niepowodzeń w nauce i braku treningu umysłowego może dojść do wtórnego obniżenia poziomu umysłowego tych dzieci i zaburzeń emocjonalnych, a w efekcie do deformacji rozwoju osobowości. Ponadto dzieci te nie chcą się już dalej uczyć. Niewiara we własne możliwości najpierw dotyczy działalności matematycznej, potem „rozlewa się” na wszystkie obszary działalności, gdzie wymagany jest wysiłek intelektualny. To rozlewanie się jest tak szybkie, że z czasem dziecko nie chce się już uczyć niczego. Dlatego z działaniami

¹⁶<http://www.ore.edu.pl/materialy-do-pobrania?download=3675:podejscie-konstruktywistyczne-do-matematycznej-edukacji-wczesnoszkolnej.pdf> [dostęp 20.03.2017].

naprawczymi nie powinno się czekać do chwili otrzymania specjalistycznej diagnozy. Nauczyciel z chwilą zauważenia trudności ucznia w nauce matematyki zobowiązany jest do wstępnej diagnozy i podjęcia działań wspierających.

Trudno jest określić, w jakim wieku można rozpoznać u dziecka symptomy specyficznych trudności matematycznych z uwagi na to, że nie zostały jeszcze do końca zbadane procesy warunkujące rozwój rozumowania matematycznego. Hipotetycznie przyjmuje się szereg funkcji z różnych sfer rozwoju psychoruchowego jako istotne w kształtowaniu się pojęcia liczby i dokonywaniu operacji arytmetycznych. Wstępnej oceny stopnia ryzyka ewentualnych trudności matematycznych można dokonać poprzez określenie poziomu rozwoju wczesnych umiejętności i osiągnięć matematycznych dziecka w wieku przedszkolnym oraz na początku edukacji szkolnej (U. Osza, 2008).

Edukacja matematyczna stanowi genezę doświadczeń matematycznych i logicznych, których głównym źródłem jest rozwiązywanie zadań. W trakcie rozwiązywania zadań dzieci nabywają doświadczenia, które ich umysły przetwarzają na wiadomości i umiejętności. Nie ma możliwości nauczania się matematyki bez rozwiązywania zadań. Niemal każde zadanie jest dla dziecka sytuacją trudną. Pokonanie tej trudności wiąże się z rozwiązaniem zadania. A zatem proces pokonywania trudności jest wpisany w edukację matematyczną. Dobrze jest, jeżeli dziecko w miarę samodzielnie pokonuje trudności. Jest to korzystne z punktu widzenia rozwoju jego osobowości i powoduje:

- 1) poczucie satysfakcji („udało mi się to rozwiązać!”),
- 2) poczucie mocy („ja to potrafiłem zrobić”, „poradziłem sobie”).

To buduje motywację do zajmowania się następnymi zadaniami. Dlatego też samo pokonywanie trudności i same trudności są czymś bardzo budującym. Innym problemem jest strach przed matematyką, a także (co jest głębsze i bardziej niebezpieczne) zjawisko lęku matematycznego. W Stanach Zjednoczonych powstał nawet program rządowy, który miał zbadać przyczyny tego zjawiska. W raporcie pt. *Dlaczego nasze dzieci nie lubią matematyki?*¹⁷ autorzy wskazują m.in., że źródłem lęku

¹⁷ *Why don't our children like math?* (1993) U.S. Department of Education Office Research and Improvement Acces Eric Pamphlet.

u dzieci są często rodzice, którzy w szkole doznawali niepowodzeń i teraz przekazują im swój niechętny stosunek do tego przedmiotu (Helena Siwek, 2005: 189). Z perspektywy lat pracy uważam, że w naszym kraju jest podobnie.

M. Szurek (2014)¹⁸ uważa, że najczęstszym błędem jest traktowanie przez nauczycieli dziecka jako „pomniejszonego dorosłego”. Dziecko ma swoje specyficzne sposoby myślenia, a jedną z wad nauczania matematyki jest, że często dorośli (nauczyciele) uczą jej tak, jakby uczyli dorosłych. Matematyka jest nauką łatwą, w tym sensie, że można się wszystkiego nauczyć, ale jak mówi M. Szurek – jest też pułapką polegającą na tym, że trzeba być systematycznym. Oznacza to, że braki i zaległości w tej nauce bardzo trudno jest nadrobić. A zatem matematyka ma strukturę dedukcyjną, która wymaga od ucznia dużej dyscypliny i systematycznej pracy.

5. Obserwacje uczniów z problemami matematycznymi

Od siedmiu lat jestem nauczycielem matematyki w Szkole Podstawowej nr 8 im. Jana Pawła II w Policach. Tam od początku swojej pracy spotykałem uczniów z trudnościami w uczeniu się matematyki. Oprócz prowadzonych obowiązkowych zajęć matematyki wynikających z planu pracy prowadziłem również zajęcia pozalekcyjne: koło matematyczne i zajęcia wyrównawcze. Podczas swojej pracy udało mi się zaszczyć w wielu uczniach pasję i radość z „uprawiania matematyki”. Celem zajęć koła matematycznego było rozwijanie zdolności matematycznych i poszerzanie wiedzy zdobytej podczas lekcji. Celem zajęć wyrównawczych była pomoc uczniom w wyrównywaniu braków. Uczniowie chętnie zostawali po lekcjach, aby nadrobić ewentualne zaległości, lub przychodzili na zajęcia i utrwalali materiał z bieżących lekcji. Chcąc zachęcić do zajęć koła matematycznego i zajęć wyrównawczych jak największą liczbę dzieci, starałem się w różny sposób urozmaicać swoje lekcje. Oprócz pracy z tablicą interaktywną, laptopami dla uczniów, wieloma programami multimedialnymi, kartami pracy, najbardziej atrakcyjne okazały się lekcje z grami (np. bingo, domino, kółko i krzyżyk 2D i 3D, *Tantrix*,)

¹⁸Niepublikowany komentarz do wykładu o zwyczajnych, nadmiernych i specyficznych trudnościach w uczeniu się matematyki E. Gruszczyk-Kolczyńskiej (IX Konferencja Naukowa Dydaktyków Matematyki w Pobierowie, 2014).

i grami planszowymi (np. Blokus, Blockers, Zestaw kontrolny PUS), logicznymi układankami (np. kostki Happy Cube), czy praca z programem multimedialnym *Matlandia* wydawnictwa GWO.

Od roku 2017 zniesiono w polskich szkołach „sprawdzian w klasie 6” kończący szkołę podstawową. Test sprawdzał jak uczniowie opanowali czytanie, pisanie i czy umieją korzystać z podanych informacji oraz stosować wiedzę w praktyce. Analizując przez kolejne lata wyniki z matematyki w mojej szkole i w Polsce, zauważyłem, że najczęściej problemów sprawiają uczniom dwa ostatnie obszary: modelowanie matematyczne oraz rozumowanie i tworzenie strategii. Prowadząc zajęcia wyrównawcze, zaobserwowałem, że co roku jest określona liczba dzieci z trudnościami. Swoje obserwacje prowadziłem w latach szkolnych 2015/2016 oraz 2016/2017. Przyglądałem się, jak pracują ci uczniowie na lekcji, w szczególności, jak radzą sobie z rozwiązywaniem zadań. Z obserwacji prowadzonych przeze mnie w latach 2015–2017 wynika, zmniejszenie doświadczeń logicznych i matematycznych. Wykonałem analizę prac domowych moich uczniów oraz analizę ocen, jakie uzyskują z matematyki. Badania obejmowały również wywiady prowadzone z nauczycielami uczącymi, wychowawcami oraz z rodzicami tych dzieci. Okazało się, że w większości rodzice mają świadomość trudności ich dzieci z matematyki i często szukają pomocy właśnie u nauczyciela. Co ciekawe, sami uczniowie chętni chodzili na takie zajęcia, prowadzone w mniejszych grupach i aktywnie w nich uczestniczyli, co nie zawsze zdarzało się na lekcjach, np. z racji tempa narzuconego przez nauczyciela. Z uwagi na to, że problem występuje, postanowiłem szczególnie zainteresować się kwestią dziecięcych trudności w uczeniu się matematyki.

5.1. Wyniki badań dotyczące trudności w uczeniu się matematyki wśród uczniów na początku klasy czwartej

Zrobiłem plan badawczy i postanowiłem uważniej przyjrzeć się problemowi na początku klasy 4. Wykonałem badania własne, które polegały na analizie testów (diagnoz) po klasie 3 uczniów w latach 2015/2016 oraz 2016/2017. Testy, które pisali uczniowie, to ogólnopolskie testy kompetencji trzecioklasistów przygotowane przez wydawnictwo GWO z programu Lepsza Szkoła. Te badania wykonałem w swojej szkole. Jak można było przeczytać w instrukcji dla nauczyciela, „test *Lupa 3* to

sprawdzian kompetencji uczniów kończących III klasę szkoły podstawowej. Jest, obok codziennych obserwacji rozwoju dziecka i analizy jego wytworów, kolejnym elementem indywidualnej diagnozy na zakończenie pierwszego etapu edukacyjnego¹⁹. Na część matematyczną było przewidziane 60 minut. Wykaz badanych umiejętności, kryteria i schemat oceniania zawarty był w kartotece testu. Sprawdzone przez nauczycieli testy wykorzystałem do swoich badań. Dobór próby badawczej to aktualna grupa dzieci z rocznika 2015/2016 i 2016/2017 mojej szkoły. Z racji tego, że pracuję w dużej szkole (>1000 dzieci, >100 nauczycieli) badania i późniejsze wnioski mogą służyć zastanowieniu się nad przyczynami niepowodzeń uczniów z matematyki. Moim badaniem objętych zostało łącznie 371 uczniów kończących klasę 3 (149 dzieci w roku 2016 i 222 dzieci w roku 2017).

W teście *Lupa 3* w roku 2015/2016 było 16 zadań, w których uczeń mógł zdobyć maksymalnie 30 punktów.

W teście *Lupa 3* w roku 2016/2017 było 20 zadań, w których uczeń mógł zdobyć maksymalnie 34 punkty. Typy zadań były różne²⁰. Były: zadania na dobieranie (D), zadania typu prawda-fałsz (P/F), zadania wielokrotnego wyboru (WW), zadania krótkiej odpowiedzi (KO), rozszerzonej odpowiedzi (RO) oraz zadania z luką (L). Zadania punktowane były za 1, 2, 3 lub 4 punkty. Obydwa testy sprawdzały umiejętności uczniów z czterech obszarów podstawy programowej (1. Sprawność rachunkowa, 2. Wykorzystanie i tworzenie informacji, 3. Modelowanie matematyczne, 4. Rozumowanie i tworzenie strategii). Różnie natomiast rozkładała się liczba punktów i waga testu dla odpowiednich obszarów w poszczególnych latach.

¹⁹Test *Lupa 3*. Ogólnopolski test kompetencji trzecioklasistów 2015/2016 oraz 2016/2017. Instrukcja dla nauczyciela, GWO.

²⁰Jedna ze zmian wprowadzonych do sprawdzianu w szóstej klasie szkoły podstawowej dotyczyła typów zadań, które mogą się znaleźć w arkuszu egzaminacyjnym. Do tej pory na sprawdzianie uczniowie rozwiązywali zadania zamknięte wyboru wielokrotnego oraz zadania otwarte. Począwszy od kwietnia 2015 r. uczeń mógł mieć do czynienia także z innymi typami zadań zamkniętych.

Relacje z badań

Wymagania	Liczba punktów	Waga testu	Numery zadań
Sprawność rachunkowa	9	30%	1, 4, 5, 7
Wykorzystanie i tworzenie informacji	11	37%	2, 3, 6, 8, 14, 16
Modelowanie matematyczne	3	10%	9, 10, 11 4
Rozumowanie i tworzenie strategii	7	23%	12, 13, 15

Tabela 1. Rozkład liczby punktów i waga testu dla odpowiednich obszarów.
Test *Lupa 3*. Rok 2015/2016

Wymagania	Liczba punktów	Waga testu	Numery zadań
Sprawność rachunkowa	13	38%	2, 4, 5, 6, 8
Wykorzystanie i tworzenie informacji	9	26%	1, 3, 7, 11, 13, 16, 20
Modelowanie matematyczne	3	10%	9, 14, 15
Rozumowanie i tworzenie strategii	9	26%	10, 12, 17, 18, 19

Tabela 2. Rozkład liczby punktów i waga testu dla odpowiednich obszarów.
Test *Lupa 3*. Rok 2016/2017

W swoich opracowaniach statystycznych posługiwałem się współczynnikiem łatwości²¹ stosowanym w pomiarze dydaktycznym (tab. 3), który odpowiada nam na pytanie, czy osiągnięcia ucznia są jego mocną czy słabą stroną. Dla swoich badań używam ponadto odcieni kolorów przypisanych łatwości zadań (czerwień – bardzo trudny i trudny, pomarańcz – umiarkowanie trudny, zieleń – łatwy i bardzo łatwy).

Łatwość	0,00–0,19	0,20–0,49	0,50–0,69	0,70–0,89	0,90–1,00
Arkusz	Bardzo trudny	Trudny	Umiarkowanie trudny	Łatwy	Bardzo łatwy

Tabela 3. Łatwość zadań w poszczególnych arkuszach

²¹https://www.oke.poznan.pl/cms,1243,wspolczynniki_latwosci.htm [dostęp 4.07.2017].

Najpierw wykonałem badania ogólne testów w poszczególnych latach. Przeanalizowałem pod kątem łatwości zadań całe testy z dwóch lat. Interesowało mnie, jak wypadły poszczególne zadania oraz łatwość czterech obszarów umiejętności. Następnie skupiłem się na badaniach szczegółowych testów i trudnościach badanych uczniów.

W roku 2015/2016 dla 149 osób badanych średni wynik całego testu to 20,53 punktów na 30 możliwych, co dało 68%. Oznacza to, że test dla uczniów był umiarkowanie trudny. Przeanalizuję teraz poszczególne wymagania w czterech obszarach (tab. 4). Sprawność rachunkowa całego testu wynosiła 6,99 punktów na 9 możliwych, co dało 78%, czyli ta umiejętność okazała się łatwa dla uczniów. Wykorzystanie i tworzenie informacji w całym teście wypadło średnio na 7,52 punktów na 11 możliwych, co daje wynik 68% i oznacza, że było ono umiarkowanie trudne. Modelowanie matematyczne wypadło na 2,54 punktów na 3 możliwe, co daje wynik 85% i było dla uczniów łatwe. Rozumowanie i tworzenie strategii wypadło najgorzej, uzyskało zaledwie 3,48 punktów na 7 możliwych, czyli wynik 50% i było dla uczniów umiarkowanie trudne. Można wywnioskować, że sprawność rachunkowa i modelowanie matematyczne wypadło lepiej niż wykorzystanie i tworzenie informacji oraz rozumowanie i tworzenie strategii. Przyjrzyjmy się teraz uważnie tym dwóm umiejętnościom, które wypadły gorzej. Do tego wykorzystam numery zadań, które były przypisane poszczególnym umiejętnościom (tab. 1).

Matematyka – umiejętności							
Sprawność rachunkowa		Wykorzystanie i tworzenie informacji		Modelowanie matematyczne		Rozumowanie i tworzenie strategii	
9	100%	11	100%	3	100%	7	100%
6,99	78%	7,52	68%	2,54	85%	3,48	50%

Tabela 4. Rozkład umiejętności w teście Lupa 2015/2016

Zadania, które sprawiły największą trudność w obszarze 2. Wykorzystanie i tworzenie informacji, to: 2., 6. i 16. Opiszę poszczególne zadania i przytoczę treść dla zadań trudnych. Zadania 2. i 16. okazały się dla uczniów trudne (kolor czerwony). Łatwość dla tych zadań wynosiła odpowiednio 0,48 oraz 0,26. Zadanie 6. było umiarkowanie trudne.

Zadanie 2. dotyczyło porównywania dowolnych dwóch liczb w zakresie 1000 [7.4]²².

Zadanie 2.

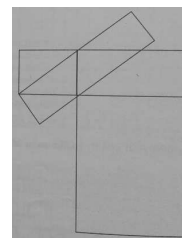
Przeczytaj uważnie zdania. Wpisz w okienku P, jeśli zdanie jest prawdziwe, lub F – jeśli jest fałszywe.

Zdanie	Zdanie prawdziwe	Zdanie fałszywe
Największa liczba trzycyfrowa to 999		
Najmniejszą liczbą dwucyfrową jest 0		
Liczbą większą od 59, a mniejszą od 61 jest liczba składająca się z 6 dziesiątek		
4 setki, 5 jedności i 3 dziesiątki to 453		
Następna liczba po liczbie nieparzystej jest liczbą parzystą		
Liczba 200 jest mniejsza od sumy liczb 156 i 64		

Zadanie 16. sprawdzało umiejętność rozpoznawania i nazywania figur geometrycznych [7.16].

Zadanie 16.

Kuba wymyślił dla siostry zadanie. Miała policzyć prostokąty narysowane na rysunku obok.



Buba nie pomyliła się i dobrze wykonała zadanie. Którą odpowiedź zaznaczyła?

- a) 3 b) 6 c) 4

²²Oznaczenia, których używam, są odniesieniem do obowiązującej podstawy programowej kształcenia ogólnego dla szkół podstawowych. *Treści nauczania – wymagania szczegółowe na koniec klasy III szkoły podstawowej. Edukacja matematyczna*, s. 50, <https://men.gov.pl/wp-content/uploads/2011/02/1c.pdf> [dostęp 4.07.2017].

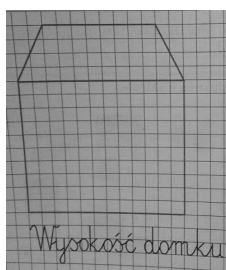
Zadanie 6. dotyczyło odczytywania wskazań zegarów [7.15].

Zadania, które sprawiły największą trudność w obszarze „Rozumowanie i tworzenie strategii”, to: 13. i 15. Opiszę poszczególne zadania i przytoczę treść zadania trudnego.

Zadanie 15. okazało się dla uczniów trudne (kolor czerwony). Łatwość dla tego zadania to 0,20.

Zadanie 15.

Oto rysunek, który zrobiła Buba (rys. 4).



Rys. 4. Ilustracja do zadania 15.

Narysuj taki sam domek, ale dwa razy mniejszy. Zmierz i zapisz wysokość narysowanego przez ciebie domku.

Zadanie 13. było umiarkowanie trudne.

Zadanie 15. sprawdzało umiejętność rysowania figur w pomniejszeniu, a także mierzenia i zapisywania wyników pomiaru [7.19; 7.10]. Zadanie 13. dotyczyło obliczania obwodu prostokąta [7.16].

W roku 2016/2017 dla 222 osób badanych średni wynik całego testu to 27,35 punktów na 34 możliwych, co dało 80%. Oznacza to, że test dla uczniów był łatwy. Można zauważyć, że w porównaniu z poprzednim rokiem uczniowie znacznie lepiej napisali diagnozę po klasie 3. Przeanalizuję teraz poszczególne wymagania w czterech obszarach (tab. 5). Sprawność rachunkowa całego testu wynosiła 10,66 punktów na 13 możliwych, co dało 82%, czyli ta umiejętność okazała się łatwa dla uczniów. Wykorzystanie i tworzenie informacji w całym teście wypadło średnio na 7,23 punktów na 9 możliwych, co daje wynik 80% i oznacza, że było ono łatwe. Modelowanie matematyczne wypadło na 2,54 punktów na 3 możliwe, co daje wynik 76%, i było dla uczniów również łatwe.

Jednak analizując poszczególne umiejętności, to właśnie ono wypadło najgorzej z całego testu. Rozumowanie i tworzenie strategii wypadło na 7,19 punktów na 9 możliwych, czyli uzyskany wynik to 80% i znowu dla uczniów okazało się łatwe. Najlepiej wypadła sprawność rachunkowa, dwa pozostałe obszary: wykorzystanie i tworzenie informacji oraz rozumowanie i tworzenie strategii uzyskały ten sam wynik. Modelowanie matematyczne wypadło poniżej 80%. Analizując te wyniki, można przyjąć, że test nie sprawił uczniom większych trudności, ale przyjrzyjmy się teraz dokładnie tym dwóm umiejętnościom, które wypadły słabiej. Do tego wykorzystam numery zadań, które były przypisane poszczególnym umiejętnościom (tab. 2).

Matematyka – umiejętności							
Sprawność rachunkowa		Wykorzystanie i tworzenie informacji		Modelowanie matematyczne		Rozumowanie i tworzenie strategii	
13	100%	9	100%	3	100%	9	100%
10,66	82%	7,23	80%	2,27	76%	7,19	80%

Tabela 5. Rozkład umiejętności w teście *Lupa 3* 2016/2017

Po analizie poszczególnych zadań w badanych obszarach okazuje się, że niektóre spośród nich okazały się dla uczniów umiarkowanie trudne oraz trudne. Umiarkowanie trudne okazały się dwa zadania: w obszarze „Wykorzystanie i tworzenie informacji” (zadanie 20.), oraz w obszarze „Modelowanie matematyczne” (zadanie 15.). Łatwość dla tych zadań wynosiła odpowiednio 0,61 oraz 0,67.

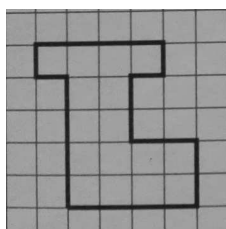
Zadanie 20. sprawdzało umiejętność rozpoznawania prostokątów położonych w różny sposób oraz w sytuacji, gdy figury zachodzą na siebie [7.16].

Zadanie 15. weryfikowało umiejętność ustalania masy produktów [7.11].

Zadanie, które okazało się dla badanych uczniów trudne, znajduje się w obszarze „Rozumowanie i tworzenie strategii” i miało ono numer 19. Łatwość dla tego zadania to 0,48. Zadanie sprawdzało umiejętność rysowania figur w powiększeniu [7.19].

Zadanie 19.

Szewc pod Częstochową szyje bardzo różne i dziwne obuwie.
Na rysunku poniżej jest forma nowego buta.



Rys. 5. Ilustracja do zadania 19.

Należy je powiększyć dwa razy. Narysuj powiększoną formę.

5.2. Przykłady zaobserwowanych trudności w zadaniach

Analizując trudności poszczególnych zadań w obu testach można zauważyć, że najczęściej problemów sprawiła uczniom geometria. Były to zadania zamknięte na rozpoznawanie figur geometrycznych oraz zadania otwarte związane ze skalą – dotyczące rysowania figur w pomniejszeniu lub powiększeniu. W zadaniu dotyczącym policzenia prostokątów uczniowie najczęściej podawali niewłaściwą ich liczbę. Odpowiedzią było przeważnie 4, gdzie poprawna odpowiedź to 6. Tu z pewnością utrudnieniem w zadaniu był sam rysunek, który nie dawał w prosty sposób odpowiedzi. Dzieci w tym wieku mogą mieć jeszcze trudności z doszukiwaniem się właściwej liczby figur, jeżeli są one „ukryte” lub ułożone w nienaturalny sposób. Zazwyczaj większość uczniów potrafi rozpoznawać prostokąty i kwadraty. Kłopoty pojawiają się z figurami nietypowymi oraz jak to było w zadaniu na teście – figurami w nietypowym położeniu, które ponadto były ze sobą połączone.

Zadania otwarte (przeważnie z krótkimi na zapisanie rozwiązania) bywają dla uczniów trudne pod kilkoma względami. Wymagają przeważnie zapisania obliczeń (rozwiązania zadania) lub wykonania rysunku i udzielenia odpowiedzi lub wyciągnięcia wniosku (uzasadnienia). W przypadku opisywanych testów, jedno z zadań dotyczyło wykonania rysunku w skali. Problemem dla ucznia były na pewno użyte w zadaniu zwroty na porównywanie ilorazowe: „dwa razy mniejszy”,

„powiększyć dwa razy”. Z perspektywy pracy nauczyciela zaobserwowałem, że szczególnie na początku klasy 4 zadania tekstowe na porównywanie różnicowe i ilorazowe są dla wielu uczniów trudne i dlatego myślą oni działania z nimi związane. Problem dotyczący porównywania różnicowego i ilorazowego wynika również ze zmian w podstawie programowej. Od roku 2009 przeniesiono umiejętność porównywania ilorazowego z klas młodszych do klas 4–6. Wynika z tego, że pokonywanie trudności uczniów przy rozwiązywaniu zadań na porównywanie różnicowe i ilorazowe spada na barki nauczycieli matematyki klas czwartych. Bardzo ważna jest też świadomość nauczycieli klas czwartych, że należy to nowe zagadnienie omawiać inaczej niż do tej pory. Trzeba podejść do tego zagadnienia, traktując je jako coś zupełnie nowego dla uczniów. Dodatkową trudnością w tych zadaniach było wykonanie rysunków w skali. Na przedstawionym obrazku uczeń miał zauważyć albo „domek”, albo „but”. Rysunek „domku” składał się z dwóch połączonych figur. Niewypełniony wewnątrz obiekt, nie wskazywał na połączone wielokąty, a jedynie na odcinki łączące dwie łamane zamknięte. Podobnie było w zadaniu, gdzie „butem” też była łamana zamknięta. W swojej pracy z uczniami zauważyłem, że przy omawianiu w klasie czwartej tematów dotyczących skali, w zadaniach tego typu dużo trudniej przychodzi im rysowanie w pomniejszeniu i powiększeniu odcinków niż wielokątów. Ciężko powiedzieć czym to jest spowodowane. Jednak lepiej jest, jeżeli na początku tematów ze skalą uczeń „widzi” wypełniony wielokąt i rysuje go w skali niż zaczyna od rysowania w skali pojedynczych odcinków. Domniemywam, że na teście dzieci „nie widziały” wielokątów, tylko same połączone odcinki. Te „kreski” to dla nich za mało i na tym etapie rozwoju pojęcie wielokąta jako figury płaskiej ograniczonej łamaną zamkniętą wraz z tą łamaną rozumieją intuicyjnie. Brakuje też w klasach młodszych takich tematów lecyjnych, w których dzieci rysują, wycinają i układają z papieru różne wielokąty. Manipulowanie takimi układankami byłoby na pewno dobrą zabawą oraz przyczyniłoby się do lepszego wyobrażenia i rozumienia figur geometrycznych. Na podstawie zebranych wyników testów widać natomiast u dzieci kłopoty z rysowaniem w skali. Namawiam więc autorów tego typu zadań, aby figury były wypełnione w środku, co z pewnością da lepszy obraz wielokątów.

Kolejną trudnością jest samo rysowanie. Dzieci w tym wieku bardzo słabo jeszcze rysują. Rysunki często są niedokładne i niestaranne. Przypominam, że są już klasy, w których dzieci przyszły do szkoły o rok młodsze (sześciolatki). Ten rok różnicy to dużo. Ręka dziecka nie jest jeszcze dość sprawna do rysowania oraz mierzenia od linijki. To jeszcze czas, kiedy rozwija się uczenie wzrokowo-ruchowe. Kształtuje się lateralizacja. Ten aspekt również miał wpływ na rozwiązalność następnego zadania. Dzieci nie umiały poprawnie zmierzyć wysokości narysowanego domku w skali. Kłopot stanowiło już odczytanie danych długości odcinków pierwotnego rysunku. Mogły przecież policzyć kratki i dodając je, narysować odpowiednio większe bądź mniejsze odcinki. Wśród prac uczniów zdarzały się również takie bez odpowiedzi, co może świadczyć o trudnościach w zrozumieniu polecenia. Z doświadczenia wiem, że dla części dzieci sama formuła zadań otwartych (np. dużo tekstu do przeczytania i analizy czy spora część miejsca na rozwiązanie) budzi postrach i powoduje, że nie podejmują w ogóle trudu rozwiązania zadania, twierdząc, że „są to zadania trudne, z którymi sobie i tak nie poradzę”.

Trudnością okazało się również porównywanie dowolnych dwóch liczb w zakresie 1000. Uczniowie mieli wskazać zdanie prawdziwe bądź fałszywe. Trudność tego zadania polegała na rozumieniu pewnych pojęć matematycznych, „wplecionych” w szkielet zdania. Pojęcia dotyczyły rozumienia struktury liczby dwu- i trzycyfrowej z uwzględnieniem odpowiednich rzędów cyfr (pozycji) – jedności, dziesiątek i setek, a także zwrotów „największa liczba trzycyfrowa”, „najmniejsza liczba dwucyfrowa”. Rozumienia pojęcia liczby parzystej i nieparzystej, sumy dwóch liczb, a także umiejętności rozkładu liczby na składniki. Wraz z wiekiem u dziecka te pojęcia są przyswajane i nie stanowią już problemów. Jednak nagromadzone w zdaniu mogą stanowić przeszkodę w prawidłowej interpretacji. Do kłopotów z rozumieniem pojęć mogą przyczyniać się również przeszkody epistemologiczne. Przeszkoda epistemologiczna spowodowana jest zazwyczaj konfliktem między nowo poznawanym pojęciem a wcześniejszym wyobrażeniem na jego temat, będącym efektem niedojrzałej (lub błędnej) intuicji. Przeszkoda taka jest naturalnym etapem na drodze rozwoju dziecka. Trudności w tym zadaniu mogły być spowodowane również nieukształtowaniem się w umysłach dzieci pojęcia liczby jako syntezy liczby kardynalnej, liczby porządkowej i liczby rozu-

mianej jako wynik mierzenia. Kształtowanie w umysłach dzieci podstawowych pojęć i umiejętności opiera się na rozumowaniu operacyjnym. Nietrudno więc wysnuć wniosek, że aby dziecko było zdolne do uczenia się matematyki, musi posługiwać się rozumowaniem operacyjnym. Tylko w ten sposób może zrozumieć sens pojęć matematycznych. Według teorii rozwijanej przez Piageta, etap operacyjno-konkretny trwa od 7. do 11. roku życia. Myślenie wówczas przebiega w oparciu o konkretne obiekty. Wprowadzanie treści abstrakcyjnych u uczniów przed 12. rokiem życia na ogół nie ma sensu. Dzieci, u których tempo rozwoju jest wolniejsze, mogą rozpocząć naukę matematyki bez koniecznej dla jej pojmowania dojrzałości intelektualnej. Rozumują one jeszcze na poziomie logiki przedoperacyjnej i nie są w stanie pojąć sensu elementarnych pojęć matematycznych.

Analizując kolejne przykłady trudności, zaobserwowałem błędy w odpowiedziach dotyczących wskazania na zegarze godziny po upływie określonego czasu od podanej godziny. Obliczenia zegarowe, a także i kalendarzowe są często przyczyną dużych trudności u uczniów. W klasie 4 zdarza się, że dzieci nie potrafią jeszcze odczytywać wskazań zegara w systemach 12- i 24-godzinnych, szczególnie na zegarze wskazówkowym. Lepiej wygląda umiejętność posługiwania się kalendarzem. W pokonywaniu trudności rozwiązywania zadań związanych z czasem zalecam stosowanie środków dydaktycznych w postaci zegarów wskazówkowych (najlepiej jeden dla każdego ucznia lub po jednym na każdej ławce). Mając taką pomoc, uczniowie powinni wykonać wiele ćwiczeń, manipulując wskazówkami zegara. Nauczyciel od razu widzi pracę uczniów i ma możliwość ewentualnej korekty. W ten sposób nauka budowy zegara czy zapisywania różnymi sposobami godziny odczytanej z zegara jest o wiele skuteczniejsza. Z pomocy zegarów nie należy rezygnować również przy obliczeniach zegarowych na godzinach i minutach, w tym obliczeniach, ile czasu upłynęło między dwoma wskazaniem zegara, oraz bardzo ważnych zadaniach w sytuacjach praktycznych.

Opiszę teraz kolejne zadanie, które dostarczyło uczniom problemów na teście, a polegało ono na obliczeniu obwodu prostokąta w kontekście praktycznym. W treści podane były wymiary laurki, która miała kształt prostokąta (21 cm i 30 cm) oraz wymiar wstążki (1 m). Należało sprawdzić (obliczyć), czy wystarczy wstążki na oklejenie laurki.

Pierwsza trudność tego zadania polegała na ustaleniu kolejności czynności prowadzących do obliczenia obwodu prostokąta. Druga trudność to różne jednostki. Wymiary prostokąta podane były w centymetrach, a długość wstążki w metrach. Wskażę kilka błędów, jakie popełniano w rozwiązaniach. Po pierwsze błędy w zapisie. Na to należy zwracać szczególną uwagę uczniów i wdrażać ich do poprawnego zapisu od początku klasy 4. Pomijam zapis jednostek. Uczeń, obliczając obwód, zapisuje: $21 + 30 + 21 + 30 = 21 + 30 = 51 + 21 + 30 = 72 + 30 = 102$.

Oczywiście było też dużo błędów w samej metodzie obliczania obwodu, gdzie podawano zazwyczaj rozwiązanie: $21 + 30 = 51$ i na tym porzeczawano. Najczęściej rozwiązaniem jednak było: $100 - 51 = 49$ i odpowiedzią: „Wystarczy wstążki na oklejenie laurki”. Inny uczeń poprawnie obliczył obwód, zapisując wynik w postaci wyrażenia dwumianowanego: $30 \text{ cm} \cdot 2 = 60 \text{ cm} + 42 \text{ cm} = 1 \text{ m } 2 \text{ cm}$. Jednak nie zrozumiał dokładnie polecenia i błędnie wyciągnął wniosek zapisując odpowiedź o treści: „Wystarczy 1 m wstążki bo zostaną 2 cm”. Należy, więc kłaść nacisk, aby uczniowie po zapisaniu działania i odpowiedzi raz jeszcze analizowali treść zadania wraz z rozwiązaniem. Dzięki temu procesowi są w stanie odszukać błędy w niepoprawnym rozumowaniu. Tutaj tego zabrakło. Powinniśmy więc kształcić tę umiejętność przy rozwiązywaniu zadań tekstowych. G. Polya w książce pt. *Jak to rozwiązać?* dokładnie opisał etapy rozwiązywania zadania tekstowego. Jednak szczególnie wyróżnił ostatni etap, tzw. rzut oka wstecz. Autor podkreśla, że spoglądając wstecz na otrzymane rozwiązanie, ponownie rozpatrując i analizując wynik oraz drogę doń prowadzącą, uczniowie utwierdzają swoją wiedzę i rozwijają swoje zdolności rozwiązywania zadań. Sprawdzenie wyniku zmusza też do wykonywania operacji odwrotnych, tak bardzo potrzebnych w rozwijaniu myślenia.

Ostatnie zadanie z testu, które opiszę, weryfikowało umiejętność ustalania masy produktów. Na rysunku były trzy wagi szalkowe, które były w równowadze. Na każdej z wag po jednej stronie szali były różne owoce, a po drugiej stało kilka odważników. Masy odważników podane były w kilogramach i dekagramach (np. 1 kg, 50 dag, 20 dag, 10 dag). Uczeń miał sprawdzić, które owoce ważyły najmniej. Należało wykonać obliczenia dodając ich masy. Możliwe, że uczniowie nie spotkali się wcześniej z taką wagą, nie mieli pojęcia, jak ona działa. Bardzo waż-

ne jest, aby w klasach młodszych, ale również w klasach 4–6 nauczyciel miał do dyspozycji wagę szalkową. Podczas lekcji nie tylko zdemonstruje schemat działania takiej wagi, pokaże odważniki, zważy kilka przedmiotów (owoców), ale również pozwoli zważyć dzieciom przedmioty codziennego użytku. Dobrze, jeżeli dzieci będą mogły same zważyć przedmioty, sprawdzić, jak ciężkie są odważniki, dotykając ich. Sprawdzić, jak ciężki jest np. kilogram cukru albo jak można obliczyć wagę jednego spinacza. Taka lekcja będzie cenniejsza i nigdy nie zastąpi samych rysunków w zeszytach ćwiczeń. Waga szalkowa występuje również w wielu programach multimedialnych oraz aplikacjach wspomagających nauczanie matematyki. Można również poszukać wersji online w internecie. W pracy nauczyciela matematyki klas 4–6 waga szalkowa stanowi również doskonałe wprowadzenie do równań. Mówiąc na lekcjach o długościach i masach, warto zatem pokusić się o ćwiczenia praktyczne z wykorzystaniem urządzeń do ich pomiaru. Uczniowie przy tym sami powinni dokonywać różnych pomiarów. Po takich ćwiczeniach zamiana jednostek długości i masy przestaje być już czystą abstrakcją oraz dużo łatwiej jest zapamiętać zależności między jednostkami, które później potrzebne są przy różnych zadaniach.

Przyglądając się teraz nie zadaniom a poszczególnym uczniom, można zauważyć, że w każdej z badanych klas w obu testach byli uczniowie, dla których test był umiarkowanie trudny (38 uczniów w teście *Lupa 3*, 2015/2016 i 31 uczniów w teście *Lupa 3*, 2016/2017), bądź trudny (28 uczniów w teście *Lupa 3*, 2015/2016 i 14 uczniów w teście *Lupa 3*, 2016/2017), a nawet dla jednej osoby w teście *Lupa 3*, 2015/2016 okazał się bardzo trudny – wyniki testu poniżej 20%.

W teście z roku 2016 badanych było 149 uczniów, z czego dla 38 uczniów test okazał się umiarkowanie trudny (26% badanych), dla 28 uczniów trudny (19%), a dla 1 ucznia bardzo trudny (0,7%). W teście z roku 2017 badanych było 222 uczniów, z czego dla 31 uczniów test okazał się umiarkowanie trudny (14% badanych), a dla 14 uczniów trudny (6%).

Na podstawie opisanych przykładów trudności wśród piszących test w poszczególnych latach można wnioskować o różnych rodzajach dyskalkulii opisanych przez L. Košča czy E. Gruszczyk-Kolczyńską. Jestem na etapie rozpoznawania tych trudności u uczniów klas czwartych oraz

udzielania im stosownej pomocy. Nie jest to możliwe bez współpracy z pedagogiem szkolnym czy chociażby z poradnią psychologiczno-pedagogiczną.

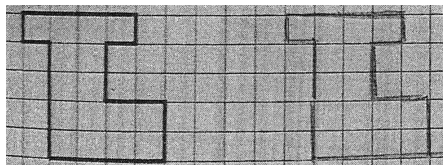
W tym momencie pokażę jedynie, jak przykładowe zadania na koniec klasy 3 rozwiązała uczennica z ryzykiem dyskalkulii (test *Lupa 3*, 2016/2017). Opiszę dwa zadania otwarte.

Zadanie 18. dotyczyło obliczania obwodu prostokąta.

Zadanie 18. Pan Michał po powrocie do domu postanowił nigdzie się więcej nie ruszać. Kupił działkę o wymiarach 50 m długości na 40 m szerokości. Oblicz, ile metrów siatki potrzebuje, aby ogrodzić swoją działkę.

Rozwiązanie, jakie zapisała uczennica, to: $50 + 40 = 90$ i podała odpowiedź: „Pan Michał kupił działkę 90-metrową”. Może to świadczyć o tym, że nie doczytała w ogóle polecenia lub nie rozumie tego co ma liczyć. Liczy mechanicznie – zapisując formułę dodawania, nie rozumiejąc matematycznego sensu zadania. Wskazuje na to odpowiedź, która nie ma sensu. Obliczenie liczby metrów siatki zostało mylnie (pewnie nieświadomie) zastąpione kupnem działki. Może nawet uczennica myli obwód z powierzchnią, którą rozumie intuicyjnie. Przecież pole powierzchni nie jest w podstawie programowej uczniów kończących klasę 3.

W zadaniu 19. (rys. 6) nie umie powiększyć dwa razy i rysuje dokładnie taką samą figurę, jaka jest obok. Po raz kolejny dochodzi do niezrozumienia polecenia.



Rys. 6. Rozwiązanie zadania 19. przez uczennicę

W obydwu rozwiązaniach można się spotkać z podobnymi sytuacjami. Brakuje w nich analizy i zrozumienia treści zadania.

Można zatem zauważyć, że co roku klasę 4 rozpoczynają dzieci, z trudnościami w matematyce. Pociuszający jest fakt, że w moim badaniu liczba takich dzieci w roku 2017 w porównaniu z rokiem 2016 zmalała. Nie można natomiast być obojętnym na ich los.

6. Dojrzałość szkolna do uczenia się matematyki

Jeżeli przyjmiemy, że problem specyficznych trudności w uczeniu się matematyki występuje i dotyka co czwarte dziecko w Polsce, to obecna szkoła stoi w obliczu wyzwania. Dobrze by było zastanowić się, co z tym zrobić. Jakie działania naprawcze podjąć?

Charakterystyczne dla zawodu nauczyciela jest to, że każdy nowy rok szkolny jest nieodgadniony. Mając nawet duże doświadczenie zawodowe oraz zaplecze oddziaływań wobec uczniów, nigdy do końca nie wiemy, z jakimi uczniami będziemy pracować. Jakie będzie im towarzyszyło zaangażowanie, czy będą to uczniowie wybitnie zdolni czy też ze specyficznymi i niespecyficznymi trudnościami w uczeniu się, ciekawi i poszukujący w zakresie nowo poznanego materiału, czy też wycofani i unikający podejmowania działań.

Jak sobie zatem poradzić ze specyficznymi trudnościami? Po pierwsze zakładam, że polskie szkoły dalej będą działały w systemie klasowo-lekcyjnym i na pewno nie zmienią się tak szybko. Choć dużo się teraz mówi o konieczności zmiany systemu na inny, to w gruncie rzeczy wszystko na razie pozostaje w rękach samych nauczycieli (por. *konstruktywistyczny model edukacji*²³). Po drugie przyjmuję, że w tempie rozwoju umysłowego dzieci występują indywidualne różnice, które będą zawsze występowały, bo jest to cechą gatunku ludzkiego i są one właściwością rozwoju człowieka. Specyficzne trudności powstają z powodu mniejszej, niż się oczekuje, dojrzałości do nauki matematyki. Z badań E. Gruszczyk-Kolczyńskiej (1985) wynika, że specyficzne trudności występują u dzieci, które rozwijają się wolniej i nieharmonijnie. Dotyczy to nawet co czwartego dziecka w klasie. Badając gotowość szkolną, nie sprawdzało się do tej pory, czy dziecko podoba wymaganiom stawianym na lekcji matematyki (Gruszczyk-Kolczyńska, 1997: 20, 135–138), ponieważ zakres badań uwzględniał tylko dwa wskaźniki gotowości do uczenia się matematyki: poziom rozwoju sprawności manualnej i percepcji wzrokowej, gdyż największe znaczenie przypisywało się współpracy „ręka

²³Zakłada on, że dzieci uczą się w integracji z otoczeniem, aktywnie konstruują własną wiedzę, wykorzystując wiedzę już posiadaną. Nauczanie oparte na eksperymentowaniu, poszukiwaniach opartych na pomysłach uczniów, tworzeniu hipotez i modeli uczniowskich.

i oko” oraz umiejętność liczenia, doliczania i odliczania przedmiotów, a także ustalania, czy w porównywanych zbiorach jest tyle samo przedmiotów.

Zatem u dziecka rozpoczynającego edukację na początku szkoły potrzebny jest pewien poziom dojrzałości procesów umysłowych. Główną przyczyną niepowodzeń dzieci w uczeniu się matematyki jest ich start z obniżoną dojrzałością do uczenia się. Od 2008 r.²⁴ wszystkie dzieci w przedszkolach w Polsce są objęte obowiązkowym badaniem dojrzałości szkolnej (gotowości szkolnej) również z matematyki.

Dojrzałość do uczenia się matematyki w warunkach szkolnych wg E. Gruszczyk-Kolczyńskiej (1997: 18) obejmuje:

1. Dziecięce liczenie:
 - sprawne liczenie i rozróżnianie błędnego liczenia od poprawnego;
 - umiejętność wyznaczania wyniku dodawania i odejmowania w zakresie 10 w pamięci, na liczmanach lub na palcach.
2. Operacyjne rozumowanie na poziomie konkretnym w zakresie:
 - uznawania stałości ilości nieciągłych – zdolność do wnioskowania o równoliczności mimo obserwowanych zmian w układzie elementów porównywanych zbiorów;
 - wyznaczania konsekwentnych serii – zdolność do ujmowania każdego z porządkowanych elementów jako mniejszego od nieuporządkowanych i jednocześnie jako największego w zbiorze już uporządkowanym.
3. Zdolność do odrywania się od konkretów i posługiwanie się reprezentacjami symbolicznymi w zakresie:
 - pojęć liczbowych – aspekt językowo-symboliczny;
 - działań arytmetycznych – formuła arytmetyczna i jej przekształcenie;
 - schematu graficznego – grafy strzałkowe, drzewka, tabele i inne uproszczone rysunki.

²⁴ Rozporządzenie z dnia 23 grudnia 2008 r. w sprawie podstawy programowej wychowania przedszkolnego oraz kształcenia ogólnego w poszczególnych typach szkół.

4. Dojrzałość emocjonalna wyrażająca się w:
 - pozytywnym nastawieniu do samodzielnego rozwiązywania zadań;
 - odporności emocjonalnej na sytuacje trudne intelektualnie – zdolność do kierowania swym zachowaniem w sposób racjonalny mimo przeżywanych napięć.
5. Zdolność do syntetyzowania oraz zintegrowania funkcji percepcyjno-motorycznych, która wyraża się w sprawnym odwzorowywaniu złożonych kształtów, rysowaniu i konstruowaniu.

Odniosę się teraz do punktu 4., w którym mowa o problemie emocji. Chodzi tutaj kategorię definiowaną jako odporność emocjonalna na stres i zdolność do radzenia sobie w sytuacji trudnej pod wpływem napięć emocjonalnych, które narastają. Krótko mówiąc, mimo napięć emocjonalnych zachowuje się jasną i czystą głowę i nie ucieka się z myślami, nie odskakuje się, bo to trudne, i nie szuka się różnych zastępczych wytłumaczeń, nie reaguje frustracją. Przykładem szkolnym może być tutaj dziecko, które mimo dużej wiedzy, wszechstronnych zainteresowań i dużej aktywności na lekcji w momencie natrafienia na trudności robi się nerwowe i popada w złość. Nie kontroluje wtedy swoich zachowań i na przykład uderza rękoma w blat ławki czy wręcz wstaje i chodzi po klasie. Innym często obserwowanym przykładem niekontrolowania emocji u dziecka jest moment pisania prac klasowych. Niektórzy uczniowie, mimo opanowania konkretnej partii materiału (nauczyciel wie, że dziecko liczyło na lekcjach przykłady na tablicy i w zeszytach, uzyskiwało dobre oceny z bieżącej pracy i z zadań domowych) w momencie pisania prac klasowych, gdy dochodzi stres i presja czasu, nie radzą sobie z emocjami i ponoszą porażkę. Porażką jest tutaj niska ocena spowodowana chociażby prostymi błędami czy nieuwagą. Mówimy wtedy najczęściej, że dochodzi do tzw. blokady u dziecka z powodu narosłych emocji.

Jak się okazuje **badanie dojrzałości szkolnej nie uwzględnia odporności emocjonalnej dziecka na sytuacje trudne intelektualnie – jednego z ważniejszych wskaźników gotowości do uczenia się matematyki w warunkach szkolnych** (Gruszczyk-Kolczyńska, 1997: 137). Aspekt dojrzałości, jaką jest odporność emocjonalna, to jednak skomplikowana sprawa, jako że mamy do czynienia z kryzysem wychowania rodzinnego i z bardzo różnymi poglądami na wychowanie dzieci

– o czym mówi także na wykładzie E. Gruszczyk-Kolczyńska we wspomnianym wcześniej filmie. Ta zdolność do rozumnego zachowania się w sytuacjach trudnych jest wynikiem kształtowania w procesie wychowania.

Z moich obserwacji wynika, że mamy coraz więcej dzieci, które są nieodporne, nadpobudliwe, nie potrafią okiełznać swoich emocji, popadają w skrajności, wykazując chwiejność emocjonalną. Głównie jednak nie wytrzymują napięć. Często też takie dzieci przeszkadzają w prowadzeniu lekcji. Tu przykładem mogą być uczniowie, którzy przeważnie mają problemy z pisaniem na lekcji, ze skupieniem uwagi, nie wykonują poleceń nauczyciela, nie pracują jak inne dzieci, a głównie rozmawiają i przeszkadzają w prowadzeniu zajęć.

Zaburzenia emocjonalne w dużej mierze są przyczyną trudności w zdobywaniu wiedzy i umiejętności matematycznych, ale również mogą negatywnie wpływać na uzyskiwane oceny, a także stanowić źródło różnych niekontrolowanych zachowań u dziecka. Z literatury psychologicznej wiadomo, że każda dostrzeżona przez człowieka trudna sytuacja wywołuje wzrost emocji „ujemnych”, niekorzystnych, jak np. gniew czy strach. Ten wzrost emocji „ujemnych” pełni rolę mobilizującą, nie niszczącą. Powoduje to, że nastawiamy się na pokonanie przeszkody i umiemy się zmobilizować tak, że potrafimy później tę przeszkodę pokonać. Emocje „ujemne” pełnią ważną rolę w naszym życiu (także u dzieci), pod warunkiem że nie jest ich za dużo. Poziom odporności emocjonalnej każdy z nas ma ustawiony inaczej i podobnie jest u dzieci. Są takie, które mają bardzo nisko ustawiony poziom odporności emocjonalnej i to też jest kolejną z przyczyn niepowodzeń w uczeniu się matematyki.

Rozpoczynając edukację, dziecko powinno być zdolne do wytrzymania napięcia, które występuje podczas uczenia się matematyki, czyli mieć odporność emocjonalną na pokonywanie trudności związanych z nabywaniem wiadomości i umiejętności matematycznych. Uczeń musi być odporny emocjonalnie, aby mimo narastającego napięcia potrafił rozwiązać dany problem matematyczny. Znając ten mechanizm i wiedząc, że w matematyce rozwiązywanie zadań jest tworzywem edukacyjnym, trzeba kształtować u dzieci odporność emocjonalną już od przedszkola. O tym, jak ją kształtować, mówiła też na wykładzie E. Gruszczyk-Kolczyńska. Pomocne są tu gry dydaktyczne. Stosuje się je po to, aby

dzieci traktowały napięcia emocjonalne nie jako coś zagrażającego, tylko, żeby mobilizowały je one do wysiłku i żeby się tego wysiłku nie bały. Oczywiście każdy sukces uskrzydla i powoduje, że jesteśmy twardsi, lepiej przygotowani do życia. Ale i co najważniejsze – nie da się bez przegranej przejść przez życie. Jednak są dwa nastawienia do przegranej: złe – kiedy następuje destrukcja i frustracja, lub dobre – kiedy mówimy: „nie udało się, to trzeba się poprawić”, „nie udało się, to trzeba jeszcze raz spróbować” i jest to dobre nastawienie do przegranej, do klęski. Poziom odporności emocjonalnej kształtuje się na skutek naszych doświadczeń, w bojach, podczas pokonywania trudności. Tego uczą gry edukacyjne i dlatego należy je stosować w pracy z dziećmi.

7. Źródła trudności na początku klasy czwartej

Podsumowując, można wyróżnić cztery najważniejsze źródła trudności w uczeniu się matematyki:

1. **Brak dojrzałości do uczenia się matematyki**, braki w przeprowadzaniu operacji abstrahowania, uogólniania, dostrzegania analogii itp., niezbędnych w kształtowaniu pojęć matematycznych. Aby dziecko mogło pokonać trudności, musi się znajdować na odpowiednim poziomie rozwoju intelektualnego.
2. **Specyfika pojęć matematycznych**, trudna ze względu na swoją abstrakcyjność.
3. **Przyczyny szkolne**, które można podzielić na dwa rodzaje: organizacyjne i dydaktyczne. Pierwsze tkwią w samej organizacji szkoły i jej programach, drugie w niewłaściwej organizacji pracy dydaktycznej. Do pierwszej grupy należą te przyczyny, które są niezależne od nauczyciela. Należą do nich: obowiązujący system nauczania, warunki organizacyjne i materialne szkół (wyposażenie szkół w sprzęt i pomoce naukowe, liczebność klas), programy nauczania, podręczniki. Drugie przyczyny tkwią w pracy nauczyciela i dotyczą **strategii nauczania i metod pracy na lekcji**.

4. **Emocje**, które są związane z odpornością emocjonalną dziecka.

W warunkach szkolnych dziecko musi być odporne, tak aby mimo narastających napięć, potrafiło rozwiązać zadanie.

W moich badaniach skupiłem się na punkcie 3., czyli przyczynach szkolnych. Nie brałem w ogóle pod uwagę czynnika takiego jak emocje. Interesuje mnie problem trudności w uczeniu się matematyki u dzieci i oczywiście w przyszłości zastanawiam się nad rozszerzeniem swoich badań. Zdaję sobie sprawę, że nie zrobiłem wielu rzeczy, które byłyby bardziej wiarygodne dla moich analiz. Wykorzystałem gotowe testy od wydawnictwa GWO, które sprawdzili nauczyciele wybranych klas. Testy zebrałem i sporządziłem odpowiednie tabelki z wynikami uczniów, które opisałem w artykule. W moich dalszych planach jest samodzielne stworzenie testu (diagnozy) dla uczniów na początku klasy 4. Test sprawdzałby wiadomości i umiejętności dziecka z klasy 1, 2 oraz 3. Tym zajmę się w dalszej kolejności. Planuję dokładniej zbadać, w czym tkwią trudności w uczeniu się matematyki i skupić się na klasach 4–6. Wiem, że moje badanie nie ujawnia przyczyn trudności w uczeniu się matematyki, jednak pokazuje jasno, że występują one w polskich szkołach i należy szukać środków zaradczych dla tych, którym powinniśmy pomóc.

8. Wskazania do pracy z dzieckiem z trudnościami w uczeniu się matematyki

Chcąc szukać środków zaradczych w bezpośredniej pracy z uczniem w trakcie jednostki lekcyjnej, warto sięgnąć do literatury przedmiotu i zapoznać się z zasadami postępowania terapeutycznego oraz uwzględnić w procesie poznawania nowych treści cechy osobowościowe ucznia, objawiające się stylami uczenia się. Przewyciężanie niepowodzeń przywraca dzieciom radość i na powrót budzi ciekawość poznawczą, zmienia na lepsze obraz własnego „ja” i pozwala lepiej zaspokoić potrzeby psychiczne, także na terenie szkoły (Gruszczyk-Kolczyńska, 1994: 156). „Terapia pedagogiczna na materiale matematycznym to całokształt oddziaływań pedagogicznych, mających na celu eliminowanie niepowodzeń szkolnych oraz ich ujemnych konsekwencji wobec ucznia ze specyficznymi trudnościami w uczeniu się. Oddziaływania te mają charakter zajęć korekcyjno-kompensacyjnych, zawierających z jednej strony elemen-

ty pracy korekcyjnej – polegającej na usprawnianiu zaburzonych funkcji i wyrównywaniu braków w wiadomościach i umiejętnościach szkolnych, z drugiej strony – na kompensacji, która może być także rozumiana jako wyrównywanie braków oraz jako wspomaganie funkcji dobrze rozwijających się, będących podstawą do tworzenia poznawczych mechanizmów zastępczych” (Marzec, Tuszyńska-Skubiszewska, 2012b: 2).

Jako nauczyciel uważam, że (za D. Woźniak-Ryńcka, 2012: 2):

- im wcześniej udzielimy pomocy uczniowi, tym lepsze przyniesie ona efekty;
- nigdy nie jest za późno, aby objąć ucznia specjalistyczną opieką. Należy to uczynić na każdym etapie edukacyjnym;
- ukierunkowana praca terapeutyczna musi być kontynuowana przez cały okres nauki. Zaprzestanie ćwiczeń korekcyjno-kompensacyjnych może spowodować nawrót problemów;
- nie należy zaprzestawać systematycznej pracy terapeutycznej nawet wtedy, gdy wydaje się, że ustąpiły typowe symptomy zaburzeń;
- nie ma szybkiego sposobu na przezwyciężenie specyficznych trudności w uczeniu się matematyki, ale można wiele zrobić dzięki systematycznej, dobrze zorganizowanej pracy terapeutycznej;
- terapia specyficznych trudności w uczeniu się wymaga od nauczyciela-terapeuty rozległej wiedzy i doświadczenia w zakresie pracy z dziećmi z zaburzeniami funkcji percepcyjno-motorycznych, a także zaangażowania i twórczego podejścia, uwzględniającego specyfikę każdego dziecka.

Założenia terapeutyczne w pracy z dziećmi z trudnościami w nauce matematyki według E. Gruszczyk-Kolczyńskiej (1992) świetnie sprawdzają się również dla nauczycieli prowadzących zajęcia na początku klasy 4. Należą do nich:

1. jak najdłuższa edukacja na poziomie enaktywnym (czyli działania polegające na manipulowaniu konkretnymi przedmiotami);
2. stawianie wymagań na miarę strefy najbliższego rozwoju;
3. kompleksowa opieka wychowawcza (poczucie bezpieczeństwa) i stała współpraca z rodzicami;

4. akceptacja dziecka i prawidłowa relacja emocjonalna;
5. aktywizowanie dziecka poprzez naprzemienne układanie i rozwiązywanie zadań matematycznych oraz wspólne tworzenie gier planszowych.

Ważne w terapii jest również to, by uczeń potrafił znieść własne napięcie psychiczne bez zakłóceń swojej aktywności, aby przeszkody i trudności nie załamywały go, lecz pobudzały do działania. Ważnym elementem prowadzonej terapii matematycznej jest dbałość, aby uczeń mógł pracować w przyjaznej dla siebie atmosferze. W kontaktach indywidualnych i grupowych, w grach i zabawach matematycznych ważne jest, aby dziecko jak najczęściej doświadczało sukcesu przy innych osobach i wzmacniało wiarę we własne możliwości. Terapia uczniów ze specyficznymi trudnościami w uczeniu się matematyki jest procesem twórczym, nastawionym na wywołanie i utrzymanie pożądanej motywacji uczniów do nauki matematyki, dlatego osoba prowadząca terapię pedagogiczną powinna być kreatywna w dostarczaniu bodźców po to, aby zajęcia były atrakcyjne i twórcze zarówno dla ucznia, jak i dla terapeuty (Woźniak-Ryńska, 2012: 3). Osoba prowadząca zajęcia powinna u takiego ucznia wyzwać ciekawość poznawczą. Do osiągnięcia tego celu potrzebne jest nie tylko duże zaangażowanie nauczyciela, wysokie kompetencje interpersonalne, ale również wyposażenie w pomoce terapeutyczne. Ważne jest, by uczeń zechciał współpracować z nauczycielem, by uwierzył, że poprawa jego sytuacji szkolnej jest możliwa. Nie jest to oczywiście gotowa przeze mnie propozycja terapeutyczna, jedynie tylko wyznacza kierunek postępowania z dzieckiem.

Niemożliwość opanowania przez dzieci mające trudności w uczeniu się matematyki najprostszych obliczeń matematycznych powoduje, że na lekcji matematyki są one narażone na ciągły stres. Widzą, że wypadają gorzej niż rówieśnicy, którym matematyka nie sprawia większych kłopotów, zaczynają stosować różne sztuczki, aby uniknąć sytuacji wymagającej wysiłku intelektualnego, co powoduje kolejne niepowodzenia i pogłębia przepaść między uczniami.

Im wcześniej rozpoznana zostanie u ucznia trudność w uczeniu się matematyki, tym większa szansa na sukces nie tylko w postaci wyrównywania braków, ale także, a może przede wszystkim, uruchomienie mechanizmu pokonywania trudności w uczeniu się, gotowości do podejmowa-

nia wysiłku intelektualnego i kompensacji zaburzonych funkcji. Zasadne jest zatem szukanie przyczyn trudności w uczeniu się matematyki, aby dochodząc do źródła problemu, unikać w relacji nauczyciel – uczeń sytuacji nacechowanych lękiem i wycofaniem.

Ważna jest zatem profilaktyka, aby nie dopuszczać do powstania niepowodzeń. Takim programem wspomagającym nauczanie matematyki jest *Dziecięca matematyka* E. Gruszczyk-Kolczyńskiej i E. Zielińskiej. To stosowany w większości przedszkoli w Polsce program wraz z opracowaną metodyką radzenia sobie z edukacją matematyczną mimo różnic indywidualnych, po to, żeby wszystkie dzieci mogły rozwijać się we właściwym tempie i żeby było coraz więcej dzieci dojrzałych do szkoły i takich, które nie będą mieć trudności. Ważne, aby pamiętać, że nie da się nauczyć dzieci matematyki bez manipulacji, nie da się tego zrobić na zasadzie patrzenia. Nie da się zastąpić osobistych doświadczeń manipulacyjnych słowami.

Kolejną ważną regułą jest jak najczęstsze odwoływanie się w nauczaniu do rzeczywistości (co pokazały badania brytyjskie 1976 r.) nawet do 14. roku życia (Gruszczyk-Kolczyńska, 1994: 179). Jak się okazuje, 20% młodzieży w tym wieku jest w stanie rozumować na poziomie operacji formalnych, wszyscy pozostali rozumują na poziomie operacji konkretnych. Musi zatem być odwołanie do rzeczywistości w nauczaniu matematyki. W zajęciach terapeutycznych należy uwzględniać ćwiczenia polisensoryczne, a także wymagające dłuższej koncentracji uwagi na materiale wzrokowym, przestrzennym oraz językowym. Bardzo ważne jest aby w początkowym etapie nauki szkolnej w kształtowaniu zdolności liczenia oraz przyswajania pojęć matematycznych aktywizować funkcje percepcyjne (Oszwa, 2008).

Bez względu na przyczyny trudności, należy je pokonywać. Najlepszym sposobem byłyby zajęcia wyrównawcze indywidualne, ale wiadomo, że w każdej klasie jest kilku uczniów z problemami i dlatego należy zorganizować zajęcia zespołowe liczące nie więcej niż dziesięciu uczniów. W szkołach są to przeważnie zajęcia dydaktyczno-wyrównawcze przeznaczone na pracę z uczniami mającymi trudności w nauce. Nie można jednak zapominać o uczniu z trudnościami podczas pracy na lekcji matematyki. Należy stale wspierać jego rozwój i przygotować dla niego specjalny zestaw zadań tak, aby można go było zająć choć na chwilę pod-

czas lekcji, nagradzać go nawet za bardzo małe osiągnięcia, wzmacniając jego motywację. Stosować prosty, jasny niekoniecznie całkiem formalny język matematyczny – przy wprowadzaniu nowych zagadnień odwoływać się jak najczęściej do praktyki życiowej. Systematycznie sprawdzać zadania domowe. Wciąż zachęcać i motywować do pracy. Przygotowywać zróżnicowane karty pracy dla uczniów. Różnicować zadania domowe pod względem trudności. Pozwolić, aby uczeń zdolniejszy pomagał podczas ćwiczeń uczniowi słabszemu. Zadbać o właściwe usadzenie na lekcji. Najlepiej z przodu, blisko nauczyciela. Na pracach klasowych przygotować zadania z małej partii materiału. Stosować pracę w grupach, by umożliwić współpracę i wzajemną pomoc. Wracać do podstawowych pojęć i działań matematycznych. Potrzeba również stosować indywidualizację nauczania, zarówno na obowiązkowych, jak i dodatkowych zajęciach edukacyjnych. Jeśli uczeń słaby w czasie lekcji nie będzie aktywnie włączony w proces nauczania, to nie wykona samodzielnie zadania domowego. Należy w czasie lekcji wykorzystywać różnorodne materiały, pomoce i środki dydaktyczne, np. ciągi zadaniowe, karty dydaktyczne, gry matematyczne, teksty sterujące, które zapewniają indywidualizację nauczania. Jeśli uczeń słaby będzie osiągał przynajmniej minimalne sukcesy, to jego motywacja i zainteresowanie będą wzrastały, a tym samym istnieje szansa, że opanuje przynajmniej wymagania konieczne. Indywidualizację należy też stosować w zadaniach domowych i pracach pisemnych (pracach klasowych, sprawdzianach) (B. Rabijewska, 1999: 265).

Przytoczę teraz fragment z opinii poradni psychologiczno-pedagogicznej uczennicy z grupy ryzyka wystąpienia specyficznych trudności w uczeniu się matematyki, w której wyraźnie zostały zawarte wskazania dla szkoły do udzielenia pomocy.

1. Pomocy należy udzielić w formie zajęć:

- korekcyjno-kompensacyjnych w celu doskonalenia wyobraźni przestrzennej, funkcji słuchowych, koordynacji wzrokowo-ruchowej, rozumowania arytmetycznego;
- dydaktyczno-wyrównawczych (w miarę możliwości wskazane są zajęcia indywidualne) w celu ćwiczenia umiejętności rachunkowych: liczenie w pamięci z wykorzystaniem gier dydaktycznych, np. kart matematycznych, domina liczbowego, grę w kości, itp.

2. Współpraca nauczyciela matematyki z rodzicem w celu pomocy w wyrównywaniu kompetencji matematycznych dziecka w oparciu o sporządzony harmonogram ćwiczeń i zadań kształcących arytmetyczne myślenie i podstawowe umiejętności liczenia.
3. Dostosowanie wymagań edukacyjnych m.in. poprzez:
 - zmniejszanie stopnia trudności zadań zleczanych do samodzielnego rozwiązania oraz stwarzanie możliwości wyboru w pracach klasowych zadań o różnym stopniu trudności;
 - podawanie uproszczonej instrukcji, kontrolowanie rozumienia sformułowań zawartych w poleceniach i zadaniach tekstowych;
 - dobór odpowiednich kryteriów oceniania umiejętności szkolnych;
 - motywowanie do pokonywania trudności poprzez zachęty, pochwały, docenianie nie tylko efektów pracy, ale także wysiłku wkładanego w jej wykonanie.

9. Zakończenie

Przywołam na koniec wyniki badań C. Weedona (1992). Można je streścić następująco:

- specyficzne trudności z matematyki są odrębną jednostką (w klasyfikacji trudności z uczeniem się);
- trudności te są pochodną interakcji cech uczniów, być może wrodzonych i względnie zakorzenionych oraz szczególnej natury matematyki;
- aktualne praktyki/lekcje i pomoce mogą zaspokoić potrzeby uczniów z takimi trudnościami tylko w niewielkim stopniu.

Ten ostatni punkt nie napawa optymizmem, jednak zadanie, jakie stoi dzisiaj przed współczesnym nauczycielem, niejako wymusza na nim pomoc uczniowi. Zgodnie z nową polityką oświatową MEN „nauczyciel wspiera i doradza, zna swoich uczniów i wie, jak każdemu z nich pomóc” (J. Wrona, 2017). Nauczyciel musi liczyć się z tym, że trudności wśród uczniów będą występowały i jego rolą jest pomagać uczniom w ich pokonywaniu, w zakresie swoich kompetencji i prowadzonych przez siebie zajęć w trakcie bieżącej pracy z uczniem. Sądzę też, zgodnie z myślą

J. Piageta (1977), że każde zdrowe dziecko może efektywnie uczyć się matematyki i rozwijać własne zdolności, jeżeli metody nauczania będą dostosowane do jego możliwości i potrzeb. Matematyka szkolna powinna sprawiać dziecku radość na tyle, że powinno odnosić swoje sukcesy, i jest to kluczowy warunek efektywnego uczenia się.

Literatura

B o g a c z P., *Wyniki szkół UE: poprawa w naukach ścisłych i czytaniu, słabiej z matematyką*,

<http://www.twojaeuropa.pl/4326/wyniki-szkol-ue-poprawa-w-naukach-scislych-i-czytaniu-slabiej-z-matematyka>

B o r a w s k a A., *Brak dojrzałości matematycznej jako przyczyna trudności w nauce i posługiwaniu się matematyką*,

http://www.lcre-lomza.webd.pl/sodmidn.webd.pl/pdf/BRAK_DOJRZALOSCIMATEMATYCZNEJ_JAKO_PRZYCZYNA_TRUDNOSCI_W_NAUCE_I_POSLUGIWANIU_SIE_MATEMATYKA.pdf

B o g d a n o w i c z M., A d r y j a n e k A.: 2005, *Uczeń z dysleksją w szkole. Poradnik nie tylko dla polonistów*, Gdynia.

EURYDICE: 2012, *Nauczanie matematyki w Europie: ogólne wyzwania i strategie krajowe*, EACEA, Warszawa,

http://eacea.ec.europa.eu/education/eurydice/documents/thematic_reports/132PL.pdf

G r u s z c z y k - K o l c z y ń s k a E.: 1989, *Dlaczego dzieci nie potrafią uczyć się matematyki*, Warszawa.

G r u s z c z y k - K o l c z y ń s k a E.: 1992, 1994, 1997, *Dzieci ze specyficznymi trudnościami w uczeniu się matematyki*, WSiP, Warszawa.

G r u s z c z y k - K o l c z y ń s k a E.: 2014, *Wykład o zwyczajnych, nadmiernych i specyficznych trudnościach w uczeniu się matematyki*, IX Konferencja Naukowa Dydaktyków Matematyki w Pobierowie. <http://wiadomosci.onet.pl/kraj/matura-2016-wstepne-wyniki-egzaminu/7zvb69>

K o š č L.: 1982, *Psychologia i patopsychologia zdolności matematycznych*, Warszawa.

- Kurczab M., Tomaszewski P.: 2005, *Dyskalkulia w pytaniach i odpowiedziach*, Warszawa.
- Łobocki M.: 2000, *Metody i techniki badań pedagogicznych*, Oficyna Wydawnicza Impuls, Kraków.
- Marzec A., Tuszyńska-Skubiszewska C.: 2012a, *Praca z uczniem ze specyficznymi trudnościami w uczeniu się matematyki z klas IV–VI*, Moduł 1, ORTOGRAFFITI.
- Marzec A., Tuszyńska-Skubiszewska C.: 2012b, *Praca z uczniem ze specyficznymi trudnościami w uczeniu się matematyki z klas IV–VI*, Moduł 4, ORTOGRAFFITI.
- Niemierko B.: 1975, (red.), *ABC testów osiągnięć szkolnych*, Warszawa.
- Oszwa U.: 2008, (red.), *Psychologia trudności arytmetycznych u dzieci. Doniesienia z badań*, Oficyna Wydawnicza Impuls, Kraków.
- Oszwa U.: 2008, (red.), *Wczesna diagnoza dziecięcych trudności w liczeniu*, Oficyna Wydawnicza Impuls, Kraków.
- Oszwa U.: 2005, 2008, *Zaburzenia rozwoju umiejętności arytmetycznych*, Kraków.
- Piaget J.: 1977, *Dokąd zmierza edukacja*, Warszawa.
- Pilch T., Bauman T.: 2010, *Zasady badań pedagogicznych. Strategie ilościowe i jakościowe*, Wydawnictwo Akademickie Żak, Warszawa.
- Pisarski M.: 2011, *Matematyka dla naszych dzieci*, Wydawnictwo Nowik, Opole.
- Rabiejewska B.: 1999, (red.), *Materiały do zajęć z dydaktyki matematyki*, cz. 2, WUW, Wrocław.
- Sawyer W.W.: 1974, *Matematyka nauką przyjemną*. Wiedza Powszechna, Warszawa.
- Semadeni Z.: 2016, *Podjęcie konstruktywistyczne do matematycznej edukacji wczesnoszkolnej*, ORE, Warszawa.
- Siwiek H.: 2005, *Dydaktyka matematyki. Teoria i zastosowania w matematyce szkolnej*, WSiP, Warszawa.

Słabe wyniki w matematyce i naukach ścisłych nadal problemem w Europie. Komisja Europejska – komunikat prasowy,
http://europa.eu/rapid/press-release_IP-11-1358_pl.htm

S p i o n e k H.: 1981, *Zaburzenia rozwoju uczniów a niepowodzenia szkolne*, PWN, Warszawa.

W e e d o n C.: 1992, *Specific Learning Difficulties in Mathematics* Stirling University and Tayside Region, Department of Education.

Why don't our children like math? (1993) U.S. Department of Education Office Research and Improvement Acces Eric Pamphlet.

W o ź n i a k - R y Ń c k a D.: 2012, *Praca z uczniem ze specyficznymi trudnościami w uczeniu się matematyki z klas IV–VI*, ORTOGRAFFI-TI, Moduł 5.

W r o n a J., *Wyrównywanie szans edukacyjnych uczniów ze specjalnymi potrzebami edukacyjnymi jednym z priorytetów zadań MEN*,
<http://www.pomagamydzieciom.info/files/inne/wyrownywanie%20szans%20edukacyjnych.ppt>,

Z a c z y Ń s k i W.P.: 1995, *Praca badawcza nauczyciela*, Warszawa.

**Selected examples of difficulties in learning mathematics
at the beginning of the fourth grade from a teacher
perspective**

Summary

This article concerns a particularly important group of problems resulting from the difficulties of fourth grade students in mathematics education. Contains terminological foundations, literary references, with particular regard to specific difficulties.

The article contains selected examples of mathematical difficulties which were obtained during the research in the course of diagnostic tests of third grade students.

The outline of the study, proposed diagnostic and remedial combination, is an introduction to further investigation into the causes of failure in grades IV–VI.

