

Dlaczego rozwiązywanie zadań z treścią jest dla dzieci bardzo trudne i w jaki sposób można temu skutecznie zaradzić¹

Edyta Gruszczyk-Kolczyńska

Akademia Pedagogiki Specjalnej w Warszawie
edyta.g.k@gmail.com

Streszczenie

Zadania z treścią są układane i rozwiązywane przez dzieci w przedszkolach oraz kolejnych latach szkolnej edukacji. Dzięki temu młodzi ludzie gromadzą doświadczenia, z których rodzą się wiadomości oraz umiejętności matematyczne, a także uczą się stosować je w sytuacjach zbliżonych do życiowych. Problem w tym, że w trakcie rozwiązywania zadań z treścią dzieci doznają nadmiernych trudności, a nawet niepowodzeń w nauce matematyki. W artykule tym omawiam:

- istotne, ale mało znane przyczyny nadmiernych trudności w rozwiązywaniu zadań z treścią;
- wyniki badań, których celem było ustalenie uczniowskich strategii rozwiązywania zadań z treścią w sytuacjach, gdy nie muszą stosować się do zaleceń nauczycieli;
- różnice pomiędzy nauczycielskimi metodami kierowania procesem rozwiązywania zadań a naturalnymi strategiami stosowanymi przez dzieci w trakcie rozwiązywania zadań z treścią;
- autorską metodę skutecznego pomagania dzieciom w układaniu i rozwiązywaniu zadań z treścią.

Na decyzję udostępnienia tej koncepcji nauczycielom miała wpływ radykalna poprawa efektów edukacji matematycznej realizowanej według tej koncepcji. Mam więc nadzieję, że lektura tego artykułu pomoże nauczycielom osiągnąć lepsze rezultaty w edukacji matematycznej dzieci.

1. Zadania tekstowe, a zadania z treścią

Dydaktycy matematyki uważają, że każde zadanie matematyczne ma jakąś treść, dlatego preferują określenie *zadania tekstowe*. Do rozwiązywania zadań tekstowych potrzebna jest jednak umiejętność czytania ze

¹W podrozdziale tym korzystam z fragmentów publikacji: E. Gruszczyk-Kolczyńska *Jak pomóc dziecku pokonać niepowodzenia w nauce matematyki. Rozpoznanie przyczyn i działania naprawcze. Podręcznik dla rodziców, terapeutów i nauczycieli* z serii „Dziecięca matematyka”, Wydawnictwo CEBP, (w druku).

zrozumieniem i sprawne wyluskiwanie istotnych informacji z tekstu zadania. Tego nie potrafi nawet wielu uczniów klasy IV. Dlatego w edukacji przedszkolnej oraz w matematycznym kształceniu w klasach I–III treść *zadań tekstowych* przedstawia dzieciom nauczyciel. Uzasadnia to posługiwanie się określeniem *zadania z treścią* w rozważaniach o edukacji matematycznej w przedszkolach i klasach I–III.

2. Bariera w rozwiązywaniu zadań z treścią są trudności w zapamiętaniu historyki zadania i pytania końcowego

Zadania z treścią nawiązują do doświadczeń życiowych dzieci. Składają się z historyjki zakończonej pytaniem. W historyjce są podane wielkości i zależności pomiędzy nimi. W pytaniu końcowym zawarta jest informacja, co trzeba ustalić, aby zadanie było rozwiązane. Nauczycielom wydają się one tak łatwe, że przedstawiając je dzieciom, oczekują, że zapamiętają treść zadania po jednym wysłuchaniu i przystąpią do rozwiązywania. Jakie są tego konsekwencje, pokazuje znane zadanie z pułapką².

Z zajezdni wyjechał pusty autobus.

Na pierwszym przystanku wsiadło 5 pasażerów.

Na drugim przystanku wysiadło 2 i wsiadło 6 pasażerów.

Na następnym przystanku dosiadło się jeszcze 7 pasażerów.

Na kolejnym przystanku wsiadło 4, a wysiadło 6 pasażerów.

Ile było przystanków?

Nieco przydługa historyjka zadania sugeruje dzieciom, że trzeba się skupić na pasażerach jadących autobusem, chociaż pytanie końcowe zadania dotyczy liczby przystanków. Gdyby dzieci potrafiły odtworzyć z pamięci treść zadania, bez kłopotów odpowiedziałyby na pytanie o liczbę przystanków. Niemożność zapamiętania³ historyjki i pytania

²Jest to przykład znanego zadania niestandardowego, z nadmiarem danych. Przypominam, że w edukacji matematycznej dzieci wyróżnia się zadania standardowe oraz niestandardowe, a w ich obrębie – zadania celowo źle sformułowane. Więcej informacji podają B. Bogajska-Jaszczołt, M. Czajkowska, *Zadania niestandardowe w teorii i praktyce nauczania w klasach I–III* w: Z. Semadeni, E. Gruszczyk-Kolczyńska, G. Treliński, B. Bugajska-Jaszczołt, M. Czajkowska, *Matematyczna edukacja wczesnoszkolna. Teoria i praktyka*, Wydawnictwo Pedagogiczne ZNP, Kielce 2015.

³Charakterystyka możliwości i ograniczeń dziecięcej pamięci znajduje się w publikacjach: M. Jagodzińska, *Rozwój pamięci w dzieciństwie*, GWP, Gdańsk 2003,

końcowego blokuje dzieciom rozwiązywanie zadań z treścią od przedszkola do klasy IV włącznie.

Na tym nie koniec. W trakcie słuchania historyjki w **umysłach wielu dzieci pojawiają się skojarzenia, które skutecznie przeszkadzają w zapamiętaniu zadania**. Oto przykład:

Tata i Tomek pojechali do lasu na grzyby.

Tata znalazł 2 grzyby, Tomek – 3 grzyby.

Ile grzybów znaleźli?

Dzieci zastanawiają się: *Może tata i Tomek zabłądzili w lesie? Może spotkali groźnego wilka?* itd. Po usłyszeniu pytania końcowego orientują się, że chodzi o policzenie grzybów. I znowu – gdyby dzieci potrafiły odtworzyć z pamięci historyjkę zadania i pytanie końcowe (na zasadzie przewijania filmu) – bez trudu rozwiązałyby zadanie. Ponieważ nie pamiętają treści zadania, przestają się nim zajmować.

Niektórzy metodycy uważają, że opisane przeszkody miną, gdy dzieci opanują czytanie ze zrozumieniem. Mogą bowiem ponownie przeczytać tekst zadania i wyłuskać z niego potrzebne informacje. Problem w tym, że niewielu uczniów z klasy IV potrafi analizować czytane zadanie na takim poziomie, żeby wyłuskać informacje ważne dla jego rozwiązania.

Na tym nie koniec, gdyż na opisane kłopoty z zapamiętaniem zadań z treścią nakładają się inne, równie poważne komplikacje.

3. Nadmierne trudności są także spowodowane zbyt słabą orientacją dzieci w konwencji logicznej rozwiązywaniu zadań z treścią

W trakcie rozwiązywania zadań z treścią dzieci muszą przechodzić w rozumowaniu z sytuacji życiowej do matematyki i z powrotem. Informacje zawarte w historyjkach są podane w języku potocznym, ale rozwiązanie zadania ma być sformułowane w języku matematycznym, a później ujęte w formie działania. Po rozwiązaniu zadania dziecko musi ponownie wrócić do sytuacji życiowej przedstawionej w zadaniu, bo tylko w taki sposób może odpowiedzieć na pytanie końcowe. Przykładem jest prościutkie zadanie:

E. Gruszczyk-Kolczyńska, E. Zielińska, *Wspomaganie dzieci w rozwoju do skupienia uwagi i zapamiętywania. Uwarunkowania psychologiczne i pedagogiczne, programy i metodyka*, WSiP, Warszawa 2005).

Mama kupiła 5 jabłek, 4 gruszki i 3 cytryny.

Ile owoców kupiła mama?

Rozwiązując to zadanie, uczeń klasy I musi podane liczby owoców i sytuację *kupiła* przełożyć na język matematyki i zapisać w formie działania

$$5 + 4 + 3 =$$

Po obliczeniu sumy

$$5 + 4 + 3 = 12$$

ma wrócić do sytuacji życiowej i podać liczbę zakupionych owoców. Problem w tym, że nauczyciele nie dostrzegają tych komplikacji i nie zadają sobie trudu, aby wdrażać dzieci do rozwiązywania zadań z treścią w przedszkolu i klasach początkowych⁴.

Przejdźmy do omówienia relacji rozumowanie a emocje, gdyż w trakcie rozwiązywania nieco trudniejszych zadań dzieci realizują czynności intelektualne na tle złożonych procesów emocjonalnych. Warto poznać, jakie się z tym wiąże komplikacje edukacyjne.

4. Powodem nadmiernych trudności w rozwiązywaniu zadań z treścią jest to, że wymagają sporej odporności emocjonalnej i dojrzałości społecznej dzieci

W zadaniu matematycznym – zwłaszcza w zadaniu z treścią – zawarta jest trudność lub kilka trudności, które trzeba pokonać, rozwiązując je. Odczucie tych trudności ma indywidualny charakter. Rozważmy, jakie są tego konsekwencje.

W badaniach nad przyczynami niepowodzeń w uczeniu się matematyki⁵ ustaliłam, że **dzieci doznające tych niepowodzeń nadawały zadaniom odmienny sens. Traktowały zadania z treścią jako sytuacje emocjonalnie przykre i broniły się przed koniecznością zajmowania się nimi.** Takie nastawienie wynika z indywidualnej (subiektywnej) oceny stopnia trudności zadania, pojawiania się emocji ujemnych i uruchamianych mechanizmów obronnych.

⁴Jedną z przyczyn jest to, że w znanych mi metodykach nauczania początkowego nie omawia się powodów nadmiernych trudności w rozwiązywaniu zadań z treścią, które przedstawiam w tym artykule.

⁵Szczegółowy opis tych badań wraz z prezentacją wyników i interpretacją znajduje się w rozdziale 5. publikacji E. Gruszczyk-Kolczyńska *Dzieci ze specyficznymi trudnościami w uczeniu się matematyki. Przyczyny, diagnoza, zajęcia korekcyjno-wyrównawcze*, WSiP, Warszawa 1992 i 12 późniejszych wydań.

Czynności poznawcze i intelektualne angażowane w rozwiązywanie zadań z treścią są realizowane na tle złożonych procesów emocjonalnych, których znaczenia nie sposób przecenić. Emocje decydują bowiem o nastawieniu dziecka do zadań matematycznych – czy podejmie intelektualny trud rozwiązywania ich, czy będzie bronić się przed taką koniecznością. Nim przedstawię, w jaki sposób emocje sterują zachowaniem dzieci podczas rozwiązywania zadań z treścią, garstka teorii.

Na wiele lat przed ogłoszeniem koncepcji inteligencji emocjonalnej, fenomen regulacyjnej roli emocji w procesach poznawczych opisali i wyjaśnili O.K. Tichomirow⁶ i R.B. Zajonc⁷ oraz K. Obuchowski⁸ i M. Tyszkowa⁹. Przyjęto, że człowiecze emocje określają subiektywne odzwierciedlenie rzeczywistości. Determinują orientację w tym, z czym człowiek ma do czynienia, i wyznaczają ramy poznania intelektualnego. Orientacyjna rola emocji polega – najkrócej mówiąc – na wstępnej ocenie sytuacji i zdarzenia, zanim zostanie ono przez człowieka rozpoznane intelektualnie. Na ocenę tę (wartościowanie) wpływają wcześniejsze doświadczenia i aktualne potrzeby człowieka. Jeżeli wartościowanie to jest:

- *pozytywne*, człowiek dąży do intelektualnego poznania tego, z czym się styka;
- *negatywne*, zaczyna bronić się i unika wysiłku intelektualnego potrzebnego do poznania, co to jest.

⁶Chodzi o słynne badania opisane w książce O.K. Tichomirowa *Struktura czynności myślenia człowieka. Z badań teoretycznych i eksperymentalnych*, PWN, Warszawa 1976, s. 218–246. Ujawniają one mechanizm emocjonalnego torowania przebiegu procesów intelektualnych. Tichomirow ustalił, że emocje wyznaczają kierunek i przybliżony obszar poszukiwania sposobu rozwiązania zadania, a także decydują o poczuciu obrania właściwego (lub niewłaściwego) sposobu rozumowania w trakcie rozwiązywania trudnych zadań.

⁷R.B. Zajonc, *Uczucie i myślenie: nie trzeba się domyślać aby wiedzieć, co się woli*, „Przegląd Psychologiczny” 1985 nr 1. W rozprawie tej przedstawione są dowody na to, że procesy emocjonalne oraz intelektualne są ze sobą tak silnie powiązane, że nie sposób ich rozdzielić.

⁸K. Obuchowski *Kody orientacji emocjonalnej i struktura procesów emocjonalnych*, PWN, Warszawa 1982, s. 228–235. Dodam, że rozprawa ta ukazała się wiele lat wcześniej niż powszechnie dziś uznawana koncepcja inteligencji emocjonalnej.

⁹M. Tyszkowa, *Zachowanie się dzieci szkolnych w sytuacjach trudnych* WSiP, Warszawa 1972 oraz *Problemy odporności emocjonalnej dzieci i młodzieży*, Wydawnictwo Nasza Księgarnia, Warszawa 1972. Publikacje te zawierają wyniki badań i atrakcyjne po dziś dzień wnioski z badań.

Gdy człowiek może się posłużyć obiektywnymi informacjami, wartościowanie emocjonalne sytuacji i zdarzeń odgrywa rolę przygotowawczą i mobilizuje do dalszego, już intelektualnego poznania. Jeżeli z jakichś powodów nie może on korzystać ze swoich możliwości intelektualnych, wówczas orientacja emocjonalna decyduje o tym, że nie chce się zajmować tym, czego po prostu nie rozumie.

Z moich badań wynika¹⁰, że ustalenia te dotyczą także dzieci, które nie dysponują wiadomościami i umiejętnościami matematycznymi koniecznymi do poznania zadania i jego rozwiązania, a także nie pojmują wyjaśnień nauczyciela, gdyż pozostają na zbyt niskim poziomie rozumowania operacyjnego (w sensie J. Piageta).

Na dodatek dzieci te doświadczają sporo przykrości – nawet upokorzeń – gdy nie potrafią rozwiązać zadania, z którym ich rówieśnicy nie mają większych kłopotów. Konieczność rozwiązywania zadania matematycznego – zwłaszcza zadania z treścią – zapowiada tym dzieciom nieuchronność stresorów i jawi się jako sytuacja nieznośna emocjonalnie. Przyjrzymy się więc dokładniej, jak to się dzieje.

4.1. Jak emocje zmieniają nastawienie uczniów z niepowodzeniami do działalności matematycznej

W wyniku badawczej analizy funkcjonowania uczniów z niepowodzeniami z matematyki w sytuacji, gdy muszą zajmować się zadaniem z treścią, ustaliłam:

- **tendencję do przedłużania części organizacyjnej zajęć z edukacji matematycznej.**

Badani uczniowie zbyt długo przygotowywali przybory (np. grzebali w tornistrach, ociągali się z wyjęciem zeszytów), niektórzy spóźniali się na zajęcia lub skarżyli się na np. ból brzucha (stosowali ucieczkę w chorobę). W ten sposób dążyli do opóźnienia chwili, gdy będą musieli wykazać się wiadomościami i umiejętnościami matematycznymi, którymi nie dysponują.

- **kierowanie aktywności na obronę przed koniecznością samodzielnego rozwiązania zadania.**

¹⁰Są opisane w publikacji E. Gruszczyk-Kolczyńska, *Dzieci ze specyficznymi trudnościami...* rozdział 5.

Wskazywały na to następujące zachowania badanych uczniów:

- wymuszanie od rówieśników dodatkowej pomocy lub wierne naśladowanie ich czynności (przepisywanie, układanie bliźniaczych konstrukcji np. z patyczków), oczekiwanie na gotowe rozwiązanie i szybkie odpisywanie wyniku;
- powtarzanie nieskutecznych czynności, zamieranie w pozornym bezruchu, pokazywanie bezradności itd.

W czasie prowadzenia obserwacji nie zdarzyło się, aby któryś z uczniów doznających niepowodzeń w nauce matematyki rozwiązał samodzielnie chociaż jedno zadanie. Taki był efekt ukształtowanych już reakcji obronnych.

Zamiast dążyć do rozwiązania zadania uczniowie z niepowodzeniami w nauce matematyki przystępują do obrony przed zagrożeniem, którym jest konieczność zajmowania się zadaniem. Sytuację zajmowania się zadaniem kojarzą bowiem z nieprzyjemnymi emocjami. Konsekwencją zmiany nastawienia do zadania oraz spaczonych percepcji zadania jest blokada w nabywaniu doświadczeń koniecznych do tworzenia pojęć i wiadomości matematycznych. Dlatego uczniowie – którzy tak zmienili nastawienie do rozwiązywania zadań z treścią – doznają niepowodzeń w nauce matematyki ze wszystkimi konsekwencjami.

Na tym nie koniec. **Na subiektywne odczucie trudności zawartej w zadaniu mają także wpływ warunki, w jakich dzieci je rozwiązują.** Gdy dziecko rozwiązuje zadanie z treścią w ramach pracy domowej, musi polegać na tym, co wie i potrafi z matematyki. Dorośli rzadko potrafią mu pomóc, gdyż inaczej interpretują problemy zawarte w zadaniu. Jeżeli zadanie wydaje się im łatwe, prośbę dziecka o pomoc interpretują jako wymigiwanie się. Bywa też, że zadanie jest dla nich zbyt trudne.

Gdy uczeń rozwiązuje zadanie w trakcie zajęć szkolnych, może skorzystać z pomocy rówieśników. Realne jest też odpisanie gotowego wyniku, gdy zadanie jest dla niego zbyt trudne. Sprawa komplikuje się znacznie, gdy dziecko jest wywołane do tablicy i nie potrafi samodzielnie rozwiązać zadania. Wówczas na zawarte w zadaniu trudności nakłada się obawa przed ośmieszeniem. Nauczyciel i rówieśnicy widzą bowiem, jak mało wie i potrafi z matematyki.

5. Nadmierne trudności w rozwiązywaniu zadań z treścią wynikają z nie dobrej metodyki wdrażania dzieci do rozwiązywania zadań z treścią

W trakcie prowadzenia badań nad przyczynami nadmiernych trudności w rozwiązywaniu zadań z treścią wielokrotnie zastanawiałam się, dlaczego nauczyciele poprzestają na słownym przedstawieniu uczniom zadania, a potem prowadzą ich *krok po kroku* pytaniami i poleceniami do rozwiązania zadania. Ustaliłam, że powodem jest, niestety, powszechne przekonanie, że należy:

- kształtować umiejętności matematyczne w umysłach dzieci za pomocą wyjaśnień słownych typu: *Powiem wam, co macie zrobić*, i dopilnowanie, aby realizowały one podane czynności i ćwiczyły je do nawyku;
- słownie przekazać dzieciom gotową wiedzę matematyczną, zwracając się nich na przykład tak: *Zapamiętajcie – w dodawaniu wynik nie zależy od kolejności dodawania składników*, i sprawdzanie, czy potrafią one to powtórzyć.

Takie przekonania wywodzą się zapewne z tego, że w ramach studiów nauczycielskich w zbyt małym stopniu skłania się studentów do krytycznej analizy zaleceń zawartych w metodykach nauczania matematyki¹¹. Zalecenia metodyczne są im podawane jako wytyczne typu: *W taki sposób trzeba kształtować wiadomości i umiejętności matematyczne w umysłach dzieci*. Wynika to jasno z opisu metod algorytmicznych zamieszczonych w popularnej publikacji *Kształcenie matematyczne w edukacji wczesnoszkolnej*¹².

W metodach tych zaleca się, aby nauczyciel kierował – krok po kroku – działalnością matematyczną uczniów prowadzącą do rozwiązania zadania. Kierowanie to polega na stawianiu serii pytań i przymuszania uczniów do konkretnych odpowiedzi oraz wiernego wykonania poleceń.

¹¹Dowodem zalecenia J. Nowika *Kształcenie matematyczne w edukacji wczesnoszkolnej*, Wydawnictwo Nowik, Opole 2011. s. 128, ... *zadaniem nauczyciela jest pokazanie uczniom metody rozwiązywania zadań, a nie traktowanie zadań jako pojedynczych przypadków wymagających indywidualnego podejścia do każdego z nich – i inaczej mówiąc nauczanie metod rozwiązywania zadań.*

¹²J. Nowik, op. cit.

Dotyczy to kolejno:

- poznania treści zadania (o czym jest zadanie) i pytania końcowego (co trzeba ustalić);
- wyłuskania danych (co wiadomo) i wielkości poszukiwanych (czego nie wiadomo);
- ustalenia formuły rozwiązania, zapisania jej w formie np. działania;
- wykonania obliczeń i udzielenia odpowiedzi na pytanie końcowe.

Jeżeli uczniowie nie spełniają takich oczekiwań, nauczyciel naprowadza ich. Gdy to nie skutkuje – sugeruje im, co mają wykonać. W metodach algorytmicznych przyjmuje się bowiem, że gdy uczniowie rozwiążą to zadanie i kilka następnych, opanują technikę rozwiązywania zadań pokrewnych.

Główną wadą metod algorytmicznych jest jednak to, że uczniowie nie znają planu rozwiązania (zna go nauczyciel), zakłada się bowiem, że poznają go w trakcie podążania krok po kroku za nauczycielskimi wskazówkami. Problem w tym, że uczniowie stosując się do tych wskazówek, mają kłopoty w powiązaniu wykonywanych czynności z rozwiązaniem zadania.

Dowodzą tego wyniki obserwacji zachowania uczniów i nauczyciela w trakcie rozwiązywania zadań z treścią¹³ w klasie II:

- nauczyciel sprawnie kierował aktywnością uczniów na etapie poznawania zadania, wyłuskiwania danych i ustalania, czego trzeba się dowiedzieć, aby je rozwiązać. Gdy uczniowie zapisywali dane w zeszytach, nauczyciel spojrzął za okno i... zamilkł na chwilę;
- wówczas zniecierpliwiony uczeń zapytał głośno: *Co mamy z tymi liczbami zrobić? Dodać je czy pomnożyć?* Nauczyciel spojrzął na niego i stwierdził: *Oczywiście pomnożyć.* I dalej kierował rozwiązywaniem zadania, nie bacząc na to, że pytanie ucznia świadczyło o tym, że nie orientuje się on, jaki sens mają wykonywane czynności matematyczne.

Podobnie zachowywali się uczniowie w trakcie pisania klasówki, gdy mieli rozwiązywać zadanie z treścią. Pokazywali mi dane liczbowe wypisane z zadania i cichutko pytali, np. *Mam dodać? Trzeba pomnożyć?*

¹³Jest to fragment badań, które prowadziłam dla poznania przyczyn niepowodzeń w nauce matematyki.

Gdy skinęłam głową, zapisywali odpowiednie działanie i obliczali wynik. A potem pytali: *Co dalej?* Gdy stwierdziłam: *Macie samodzielnie rozwiązać zadanie*, przestawali zajmować się tym zadaniem.

Nauczyciele preferują metody algorytmiczne także z tego powodu, że w pakietach edukacyjnych (podręcznikach, zeszytach ćwiczeń i kartach pracy) przeważają zadania typowe, sugerujące taki właśnie sposób ich rozwiązania. Problem w tym, że gdy uczniowie wyćwiczą algorytm rozwiązywania zadań danego typu, to na kolejnych lekcjach uczą się innego algorytmu, gdyż poprzedni nie może być stosowany do innych zadań.

Dlatego – mimo starań nauczycieli – rozwiązywanie zadań z treścią jest dla uczniów psychologicznie trudne i nie przynosi spodziewanych efektów edukacyjnych. Z tego powodu postanowiłam przeprowadzić badania, których celem jest ustalenie – jak dzieci poznają zadania z treścią i jak rozumują w trakcie ich rozwiązywania, gdy nie muszą respektować zaleceń nauczycieli.

6. O badaniach, które stały się podstawą opracowania metody skutecznego pomagania dzieciom w układaniu i rozwiązywaniu zadania z treścią

Nim przedstawię wyniki tych badań, proszę Czytelnika, aby zwrócił się do siedmiolatka: *Oblicz pięć dodać trzy*. Gdy dziecko poda sumę, trzeba spytać: *Jak to obliczyłeś?* Zapewne odpowie: *Dodawałem!* W podobny sposób zachowywały się dzieci, gdy po rozwiązaniu zadania z treścią spytałam: *Powiedz mi, jak rozwiązywałeś zadanie*. Odpowiadały: *Policzyłam!* Gdy prosiłam: *Opowiedz mi, co robiłeś w swojej głowie, gdy odejmowałeś?* wyjaśniały: *No, odejmowałem*. I znowu dzieci podawały mi wynik rozumowania, bez informacji o czynnościach realizowanych w swoim umyśle.

Dzieci nie potrafią słownie opisać czynności intelektualnych zaangażowanych w rozwiązywanie zadania, gdyż czynności np. rachunkowe (jeżeli je opanowały) są realizowane automatycznie w umyśle, bez udziału ich świadomości. Żeby ominąć tę barierę poznawczą, zorganizowałam badania z zastosowaniem eksperymentów pedagogicznych w konwencji tutoringów dziecięcego¹⁴.

¹⁴Więcej informacji o tutoringach dziecięcym podaje H.R. Schaffer, *Psychologia dziecka*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2012, s. 233 i dalsze.

Celem tych badań było ustalenie, jak dzieci rozumują w trakcie rozwiązywania zadań z treścią, gdy nie muszą stosować się do poleceń swojego nauczyciela. Część pilotażową badań przeprowadziłam osobiście w szkole, część badań zrealizowała J. Zalewska pod moim kierunkiem w ramach prac nad doktoratem¹⁵. Ponieważ przebieg tych badań był podobny, a wnioski są zbieżne, przedstawiam je łącznie.

Badania te – najkrócej mówiąc – polegały na zorganizowaniu serii sytuacji, w których jedno dziecko (pełniące rolę małego nauczyciela), uczyło drugie dziecko (małego ucznia) tego, co potrafi.

- Małymi nauczycielami były starsze dzieci (z klasy III) umiejące czytać ze zrozumieniem. Dzieci te wyróżniały się dojrzałością społeczną, sprawnością intelektualną oraz sporymi wiadomościami i umiejętnościami matematycznymi.
- Małymi uczniami były młodsze dzieci o dobrych możliwościach intelektualnych¹⁶. Uczęszczały do klasy I, dlatego zdecydowanie mniej wiedziały i umiały z matematyki od swoich małych nauczycieli.

Zgodnie z ideą dziecięcego tutoringów dzieci te dobierano w pary: mały nauczyciel i mały uczeń. Najpierw mały nauczyciel rozwiązywał zadanie z treścią, a potem starał się tak kierować aktywnością małego ucznia, aby on także rozwiązał to zadanie.

Opracowując program tych badań, kierowałam się sugestią Z.I. Kałmykowej¹⁷: gdy dziecko (mały nauczyciel) uczy inne dziecko (swojego

¹⁵ Wyniki tych badań znajdują się w niepublikowanej rozprawie doktorskiej J. Zalewska, *Strategie intelektualne stosowane przez uczniów klasy trzeciej w rozwiązywaniu zadań matematycznych*, rozprawa doktorska napisana pod kierunkiem E. Gruszczyk-Kolczyńskiej, Akademia Pedagogiki Specjalnej, Warszawa 2012.

¹⁶ W badaniach pilotażowych zauważyłam bowiem taką prawidłowość: gdy mały nauczyciel uznał, że mały uczeń nie dysponuje wystarczająco dobrymi możliwościami umysłowymi, aby poradzić sobie z zadaniem, stwierdzał: *Sam rozwiążę, a ty patrz!* Mały uczeń był wówczas zepchnięty do roli widza obserwującego, jak rozwiązywał zadanie jego starszy kolega.

¹⁷ W prywatnej rozmowie Z.I. Kałmykowa opowiedziała mi o swoich doświadczeniach badawczych, których celem był wgląd w rozumowanie starszych uczniów (wyniki tych badań przedstawia w publikacjach: *Problemowo-syntetyczna metodyka diagnostyki nauczalności*, w: *Materiały do nauczania psychologii*, (red.), L. Wołoszynowa, t. 2, seria 3, Warszawa 1976 oraz *Umstwiennoje razwitiie szkolnikov ostajuszczich*

małego ucznia) tego, co sam umie, wówczas intuicyjnie poprowadzi je ścieżkami swojego rozumowania. Poprzez uważną analizę aktywności niewerbalnych (mimika, gesty, manipulacje itd.) i werbalnych (tzw. *głośne myślenie*: zastanawianie się, stwierdzenia i wyjaśnienia) małych nauczycieli i małych uczniów, można ustalić aktywności umysłowe realizowane w trakcie rozwiązywania zadań z treścią. Z tej sugestii skorzystałam w tych badaniach – jak się okazało – z zadziwiająco dobrym skutkiem.

Jeszcze kilka wyjaśnień dotyczących organizacji badań. Przed ich rozpoczęciem wytypowano zadania z treścią, które mieściły się w możliwościach umysłowych małych nauczycieli¹⁸. Zadbano też o to, aby zadania te były zrozumiałe dla małych uczniów, chociaż trudne. W trakcie badań dzieci siedziały naprzeciw siebie przy stoliku, w zasięgu rąk miały w pojemnikach patyczki, kasztany i małe klocki, liczydło koralikowe, miarkę krawiecką, linijkę, kartki oraz ołówki i kolorowe kredki. Badający zwracał się:

- do małego nauczyciela: *Świetnie rozwiązujesz zadania z treścią. To jest zadanie... (wręczał kartkę z tekstem zadania). Wiem, że potrafisz je rozwiązać. Tu są potrzebne przedmioty (wskazywał je). Postaraj się, aby zadanie to rozwiązał twój młodszy kolega;*
- do małego ucznia: *Będziesz rozwiązywał zadania pod kierunkiem twojego starszego kolegi (wskazywał małego nauczyciela). Będzie ciekawe i na pewno dasz sobie radę.*

Wypowiedzi dzieci rejestrowano (na dyktafonie) i obserwowano ich zachowania¹⁹. Po ich analizie sformułowano wnioski, które określają preferowane przez dzieci sposoby poznawania treści zadań i rozwiązywania ich.

w uczeniu, w: *Ostajuszczije w uczeniu szkolniki, Problema psychiceskowo rozwitija*, red. Kałmykowa Z.I., Kułagin I.J., Moskwa 1986. Miałam szczęście rozmawiać z Kałmykową. Opowiadając o swoich badaniach, nie wspominała o tutoringu dziecięcym. Jednak z jej wyjaśnień wynikało, że miała na myśli taką właśnie sytuację.

¹⁸Były to zadania, których rozwiązanie wymagało: a) wykonania kilku obliczeń rachunkowych, b) rozumienia sensu pomiaru długości i wykonania obliczeń na liczbach mianowanych.

¹⁹Protokoły z eksperymentów z udziałem małego nauczyciela i małego ucznia są do wglądu w cytowanej już rozprawie J. Zalewskiej *Strategie intelektualne stosowane przez uczniów klasy trzeciej w rozwiązywaniu zadań matematycznych...*

Okazało się, że mali nauczyciele – chłopcy i dziewczynki, niezależnie od tego, jakie zadanie rozwiązywali – w specyficzny sposób dążyli do poznania zadania z treścią i jego rozwiązania. Sposoby te nazwałam *dziecięcymi strategiami poznania i rozwiązywania zadań z treścią*. Przyjrzymy się im, gdyż są kluczem do podniesienia efektów edukacji matematycznej.

7. Jak dzieci dążą do poznawania zadania z treścią, jeżeli nie muszą stosować się do poleceń nauczyciela

Z przeprowadzonych badań wynika, że przeczytanie – lub wysłuchanie – treści zadania nie wystarcza dzieciom do ustalenia, co trzeba zrobić, aby je rozwiązać. **Wszystkie badane dzieci dążyły do nadania zadaniu formy dynamicznej – inscenizacja – posługując się *głośnym myśleniem* (mową głośną dla samego siebie²⁰) wraz z manipulacją przedmiotami, np. klockami, kasztanami, patyczkami.**

W ramach głośnego myślenia dzieci formułowały pytania do siebie i – po chwili – na nie odpowiadały. Mówiły, jakimi przedmiotami zastąpią obiekty z historyjki zadania. Ustawiały przedmioty w serie, rozdzielały po kilka, dobierały w pary, zsuwały lub rozsuwały je itd. Jednocześnie zastanawiały się – mówiąc do siebie półgłosem – czego należy się dowiedzieć, aby zadanie rozwiązać. Na koniec stwierdzały: *Już wiem!*

Wiele wskazuje na to, że **dzieci po to przekładają słownie określone treści zadania na dynamiczną sytuację (inscenizacja), żeby wizualizować problem zawarty w zadaniu.** W trakcie wizualizacji łączą *głośne myślenie* z manipulowaniem przedmiotami po to, aby wyłuskać i skonkretyzować wielkości zawarte w zadaniu, uchwycić dynamiczny sens relacji pomiędzy tymi wielkościami itp. Taka wizualizacja sprzyja rozumowaniu przez wgląd, jest także czymś w *autoinstrukcji*. Dlatego pomaga dzieciom ustalić, co trzeba zrobić, aby rozwiązać zadanie z treścią.

²⁰Określenie *głośne myślenie* w powiązaniu z działaniem nawiązuje do relacji pomiędzy *mową głośną do samego siebie* i działaniem określonej przez L.S. Wygotskiego *Narzędzie i znak w rozwoju dziecka*, PWN, Warszawa 1978, s. 53–58). Sporo atrakcyjnych informacji o regulacyjnej roli mowy podaje M. Kielar-Turska, *Językowa wewnętrzna i zewnętrzna kontrola działania*, „Psychologia Rozwojowa” 2013, tom 18, nr 4.

8. Jakie sposoby rozwiązywania zadania z treścią preferują dzieci w sytuacji, gdy nie muszą stosować się do poleceń nauczyciela

Gdy mali nauczyciele stwierdzali: *Już wiem!* (w domyśle, wiem, o co w zadaniu chodzi) przystępowali do **rozwiązywania zadania poprzez eksperymentowanie**. Posługiwali się:

- *głośnym myśleniem*. Półgłosem zastanawiali się nad tym, co należy zrobić, np. *Trzeba rozdzielać po trzy... Najpierw zmierzyć to... gest, Potem to... gest... I porównać...*;
- manipulowaniem zbiorami zastępczymi, także w połączeniu z *głośnym myśleniem*. Na przykład zsuwali odliczone kasztany i stwierdzali: *Trzeba dodać...*, odsuwali kilka klocków z policzonych i mówili: *Muszę odjąć...* Zastanawiali się: *Może trzeba przekładać i grupowali np. ziarna fasoli.*

Następnie krytycznie przyglądali się efektom takich manipulacji i ponownie przeliczali ułożone przedmioty. Bywało, że mali nauczyciele byli zadowoleni z wyniku pierwszego eksperymentu. Oświadczali wówczas: *Jest dobrze* i... odpowiadali na pytanie końcowe zadania. Jeżeli mieli wątpliwości, przystępowali do następnego eksperymentu i jeszcze następnego, aż uznali, że któryś ze sposobów rozwiązania (eksperymentów) zadania jest dobry. Niezależnie od tego, ile eksperymentów przeprowadzili i który uznali za dobre rozwiązanie zadania, demonstrowali radość z pokonania trudności i podkreślali poczucie mocy sprawczej, wołając: *Zrobiłem... Potrafię...*

9. Różnice pomiędzy strategiami stosowanymi przez dzieci a nauczycielskimi sposobami kierowania ich czynnościami w trakcie rozwiązywania zadań z treścią

Przeprowadzone badania ujawniają dotąd nieopisane przyczyny nadmiernych trudności w rozwiązywaniu zadań z treścią. Wynikają one z istotnych różnic pomiędzy *dziecięcymi strategiami rozwiązywania zadań a nauczycielskimi sposobami kierowania ich aktywnością w tej ważnej działalności matematycznej.*

Przyjrzymy się bliżej tym różnicom.

9.1. Rozbieżności dotyczące poznawania zadań z treścią

Nauczyciele uważają, że wystarczy słownie przedstawić uczniom treść zadania lub polecić im przeczytać tekst zadania np. z kart pracy. Potem należy sformułować kilka pytań odnoszących się do tego, co w zadaniu jest dane, a co trzeba ustalić. W trakcie hospitowanych zajęć z matematyki w klasie I, II i III ustaliłam, że uczniowie nie dysponowali przedmiotami do manipulacji²¹ typu patyczki, kasztany, klocki, liczydła w trakcie poznawania treści zadania i rozwiązywania go. Nie były potrzebne, gdyż wszyscy hospitowani nauczyciele:

- polecali uczniom rozwiązywać zadania z treścią zawarte w zeszytach ćwiczeń z rysunkową instrukcją, jak zadanie rozwiązać;
- poprzestawali na werbalnej analizie treści zadania poprzez stawianie pytań i wymuszanie słownych odpowiedzi;
- zapisywali formułę rozwiązania na tablicy lub doglądali, aby uczniowie poprawnie uzupełniali podane w zeszytach ćwiczeń rozwiązanie opracowane w konwencji rebusu (chodziło o wpisanie we właściwe miejsce cyfry – symbolu liczby, znaku działań lub relacji). Samodzielne aktywności uczniów dotyczyły głównie obliczania wyniku pojedynczych działań.

W trakcie dziesiątek hospitacji zajęć w klasach początkowych nie było ani jednej sytuacji, w której nauczyciel przedstawiał uczniom zależności zawarte w zadaniu z treścią w sposób dynamiczny, posługując się chociażby gestami.

Wyniki prezentowanych badań wskazują, że uczniowie inaczej dążą do poznania zadań z treścią. Przekładają słownie podaną treść zadania na dynamiczną sytuację (inscenizacja). Dążą do wizualizacji problemu zawartego w zadaniu łącząc *głośne myślenie z manipulowaniem przedmiotami*. Dzięki temu rozumują przez wgląd i ustalają, co trzeba zrobić, aby zadanie rozwiązać.

²¹Raz widziałam, jak na początku zajęć z matematyki w klasie II dyżurni – na polecenie nauczycielki – wyjęli z szafy patyczki, w fabrycznie zapakowanych woreczkach, i rozdali je dzieciom. Było to na początku grudnia, a patyczki były kupione – jak potem ustaliłam – we wrześniu. Nauczycielka postanowiła je udostępnić dzieciom ze względu na mnie, wiedziała bowiem, że nisko oceniam prowadzenie zajęć bez pomocy dydaktycznych. Nic dodać, nic ująć.

9.2. Rozbieżności dotyczące rozwiązywania zadań z treścią

W trakcie hospitowania zajęć ustaliłam, że po wygłoszeniu (odczytaniu) zadania nauczyciele pytali uczniów, czy rozumieją sens zadania. Nie czekając na odpowiedź, kierowali ich czynnościami prowadzącymi *krok po kroku* do rozwiązania zadania. Były to **instrukcje słowne typu *To trzeba zrobić***. **Bez stosowania pomocy dydaktycznych, bez skłaniania dzieci do samodzielnego układania planu rozwiązania zadania.**

Natomiast wszystkie badane dzieci sprawdzały swoje przypuszczenia odnośnie do rozwiązania zadania poprzez eksperymentowanie: **posługując się *głośnym myśleniem* i manipulowaniem pomocami dydaktycznymi** (patyczkami, kasztanami, liczydłami itp.). Gdy były niezadowolone z wyników pierwszego eksperymentu, obmyślały następny sposób rozwiązania. Realizowały go także poprzez eksperymentowanie – manipulując przedmiotami z *głośnym myśleniem*. Po uznaniu, że efekt eksperymentalnego manipulowania jest dobry – jeżeli była taka potrzeba – zapisywały działania i odpowiadały na pytanie końcowe zadania.

9.3. Rozbieżności dotyczące poczucia sprawstwa w rozwiązywaniu zadań z treścią

Po rozwiązaniu zadania z treścią, **nauczyciele przechodzą do rozwiązywania następnego zadania, bez okazywania zadowolenia z tego, co zostało osiągnięte.** Natomiast uczniowie pełniący rolę małych nauczycieli świętują wraz ze swoim uczniem – tak nazywam **okazywaną radość ze wspólnego rozwiązania zadania.** Odmienność ta wynika z faktu, że dla nauczycieli ważne jest rozwiązanie zadania i świadomość tego, że to oni prowadzili uczniów krok za krokiem do celu. Natomiast dla małych nauczycieli kierujących aktywnością swoich małych uczniów ważny był wspólny wysiłek i poczucie sprawstwa.

Z ustaleń tych wynika, że **stosowane przez nauczycieli sposoby zapoznawania uczniów z zadaniami z treścią oraz ich rozwiązywania rozmiągają się ze *strategiami stosowanymi przez uczniów w trakcie poznawania i rozwiązywania zadań z treścią.*** To rozmiąganie jest powodem nadmiernych trudności a nawet niepowodzeń w nauce matematyki. Ponieważ rozwiązywanie zadań jest dla uczniów głównym źródłem doświadczeń logicznych i matematycznych, przejdźmy więc do działań naprawczych.

10. Jak skutecznie uczyć dzieci układania i rozwiązywania zadań z treścią w edukacji domowej, przedszkolnej i szkolnej

Na podstawie wyników badań nad przyczynami nadmiernych trudności w rozwiązywaniu zadań z treścią oraz omówionych wyników badań opracowałam autorską koncepcję wdrażania dzieci do rozwiązywania i układania zadań z treścią. Na decyzję udostępnienia tej koncepcji nauczycielom²² miała wpływ radykalna poprawa efektów edukacji matematycznej realizowanej według tej koncepcji. Oto najważniejsze ustalenia na każdym z trzech etapów tej koncepcji.

10.1. Etap pierwszy – organizowanie sytuacji życiowych, których pomyślne rozwiązanie wymaga liczenia i rachowania

Zadania z treścią wywodzą się z sytuacji życiowych, których pomyślne zakończenie wymaga liczenia i rachowania. Dlatego wdrażanie dzieci do układania i rozwiązywania zadań z treścią trzeba rozpocząć od organizowania takich sytuacji. Oto dwa przykłady.

Rozdzielaj tak, aby każdy dostał po tyle samo.

Takie polecenia dzieci wykonują w każdym bodaj tygodniu. Żeby zyskały wartość edukacyjną, trzeba ująć je formie problemowej, np. *W torbie są cukierki. Trzeba je sprawiedliwie rozdzielić między dzieci i dorosłych. Jak to zrobić?* Najczęściej dzieci uważają, że trzeba policzyć cukierki, policzyć osoby i dawać im po jednym lub – jeżeli starczy – po dwa. Należy wysłuchać i rozważyć wszystkie dziecięce propozycje, wybrać jedną i zrealizować ją. Jeżeli okaże się, że kilka cukierków zostanie, dzieci dowiedzą się, że po rozdzielaniu po tyle samo może zostać kilka (intuicja dzielenia z resztą).

²²Z mojego rozeznania wynika, że w ramach studiów zawodowych nauczyciele rzadko mają okazję do krytycznej analizy zaleceń zawartych w metodykach nauczania matematyki. Zalecenia metodyczne są traktowane tak, jak przykazania: *macie je zapamiętać i stosować*. Bez świadomości, że większość metodyk nauczania matematyki w klasach I–III została opublikowana wiele lat temu i nie ma tam współczesnej wiedzy o prawidłowościach rozwoju umysłowego i preferowanego przez dzieci procesu uczenia się.

Porządki i inwentaryzacja.

W każdym domu rodzinnym i w każdym przedszkolu dzieci pomagają przy sprzątanii. Nudzą się, gdy są angażowane do wykonywania prostych poleceń. Sprzątanie może być interesujące, jeżeli połączy się je z ćwiczeniem dziecięcego umysłu. Oto przykład: dorosły poprosił dziecko o pomoc w sprzątanii w kuchni. Wspólnie wyjęli naczynia z szafek, dorosły patrzy na nie i zastanawia się głośno, na przykład tak: *Nie wiemy, ile mamy wszystkich naczyń. Nie wiemy też, ile mamy rondli, dużych, średnich i małych garnuszków. Trzeba naczynia pogrupować, policzyć i spisać. Wspólnie je pogrupujemy... Ty je policzysz, a ja zapiszę... Po umyciu naczyń schowamy je do szafek. A gdy zagłębimy do spisu, będziemy wiedzieć, ile mamy naczyń.* W takiej „domowej inwentaryzacji” dziecko nabywa doświadczenia w zakresie segregowania (klasyfikowania) obiektów i liczenia ich, przy okazji dowie się też, jak się robi inwentaryzację.

Jest wiele sytuacji życiowych, w których dzieci mogą segregować obiekty i liczyć je, rozdzielać przedmioty po kilka, odmierzać kroki i szacować odległość, numerować obiekty i oznaczać miejsce obranego przedmiotu w uporządkowanym szeregu itd. Zachęcam dorosłych – nauczycieli i rodziców – do włączenia dziecko do udziału w takich sytuacjach. Więcej informacji znaleźć można w publikacji, których notki podaje w przypisie²³, warto też korzystać z akcji internetowej pod hasłem #20minutdlaMATEMATYKI prowadzonej przez Z. Jastrzębską-Krajewską²⁴.

10.2. Etap drugi – wdrażanie dzieci do układania zadań do osobiście wykonanych rysunków i rozwiązywanie ich za pomocą manipulowanie zbiorami zastępczymi (poprzez symulację)

Zacząć trzeba od kilku wyjaśnień. W pakietach edukacyjnych większość zadań z treścią jest przedstawiona na ilustracjach. Wartością ich jest uświadomienie dzieciom, że sytuacja życiowa może przybrać formę

²³ *Dziecięca matematyka – dwadzieścia lat później...* rozdział 9.

²⁴ Celem tego projektu – realizowanego przez Z. Jastrzębską-Krajewską – jest wykorzystanie w codziennych sytuacjach efektywnej edukacji matematycznej. Jest on popularyzowany w mediach społecznościowych na profilu – @pani_zuzia, Facebook Pani Zuzia. Więcej na stronie www.jastrzebska-krajewska.pl. Podstawą merytoryczną jest *Dziecięca matematyka* autorstwa E. Gruszczyk-Kolczyńskiej.

historyjki przedstawionej na obrazku i zakończonej pytaniem. Natomiast poważną wadą ilustrowanych zadań jest to, że dzieci nie mogą manipulować narysowanymi obiektami, np. dosuwać je i ustalić sumę, zabierać kilka i stwierdzić, ile zostało. Dodatkowym utrudnieniem jest też interpretacja historyjki, jeżeli rozwiązanie zadania wymaga odejmowania.

Przykładem kłopotów interpretacyjnych jest ilustrowane zadanie o śledziach. Na obrazku są przedstawione 2 tace. Na jednej leżą 4 dorodne śledzie, na drugiej resztki po 3 zjedzonych śledziach (głowy śledzi i kręgosłup z ościami zakończony ogonem). Autor tego zadania założył, że dzieci będą interpretowały te obrazki tak:

- było 7 śledzi, zjedzono 3 (są głowy i ości), trzeba policzyć, ile śledzi zostało;
- było 7 śledzi, zostały 4 śledzie, trzeba ustalić, ile śledzi zjedzono (są resztki tych śledzi).

Chcąc sprawdzić, jak dzieci odczytują informacje zawarte na tym obrazku, pokazałam go starszym przedszkolakom²⁵ i powiedziałam: *To jest zadanie matematyczne o śledziach*. Tomek, roztropny sześciolatek, stwierdził: *Tu są cztery śledzie, a tu kości, bo ktoś zjadł śledzie. Ale po co dodawać do całych śledzi kości po zjedzonych śledziach?* Dla Tomka na rysunku **były** 4 śledzie i **były** kości po 3 zjedzonych śledziach. Ponieważ niczego nie zabrano, nie odsunięto, uznał, że musi to być zadanie na dodawanie, chociaż absurdalne.

Jeszcze jedno ilustrowane zadanie z kłopotliwą interpretacją. Na rysunku przedstawiono 5 jajek z natłuczonymi skorupkami oraz 4 jajka z całymi skorupkami. Autor tego zadania przyjął, że dzieci będą interpretowały rysunek jako odejmowaniem np. tak: było 9 jajek, 5 jajek ma nadtluczone skorupki. Ile jajek nie ma nadtluczonych skorupki? To zadanie także pokazałam dzieciom, mówiąc: *To jest zadanie matematyczne o jajkach*. Sześciolatka Maja stwierdziła: *Tu są jajka ze stłuczonymi skorupkami, a tu są całe jajka. Razem jest... wskazywała palcem jajka i liczyła je... Jest dziewięć jajek*. I dodała: *Moja mama nie wkłada potłuczonych jajek do lodówki*. Dla Mai na rysunku **było** 5 jajek i **były** 4 jajka, dlatego należało je policzyć razem.

²⁵Były to dzieci z przedszkola, w którym realizowano – na zasadzie innowacji – mój autorski program edukacyjny *Dziecięca matematyka*.

Pojawia się więc problem – jak wdrażać dzieci do układania i rozwiązywania zadań z treścią w przedszkolu i klasie I. Z moich ustaleń wynika, że trzeba **umiejętnie uczyć dzieci rozwiązywania i układania serii zadań z treścią za pomocą uproszczonych rysunków z zastosowaniem zbiorów zastępczych**. Nie jest to trudne dla nauczyciela, a dzieciom bardzo się podoba. Wystarczy zorganizować dzieciom 3 serie takich zadań. Do każdej serii dzieci wykonują uproszczony rysunek, na którym układają drobne przedmioty symulujące obiekty, o jakich jest mowa w historyjce zadania. Ważny jest też sposób zapoznawania dzieci z treścią zadania – chodzi o wdrażanie do wyłuskiwania danych i rozwiązywania zadania przez symulację. Oto przykładowe serie takich zadań z opisem ich rozwiązywania.

10.2.1. Seria zadań o ptakach na drzewie

Na kartonach z bloku rysunkowego dzieci rysują drzewo bez liści. Obok – w zasięgu ręki – mają drobne przedmioty, np. ciemne kartonowe trójkąty. Nauczyciel przedstawia dzieciom każde zadanie dwukrotnie. Na przykład:

12 ptaszków siedziało na drzewie. 4 odleciały.

Ile ptaszków nadal siedzi na drzewie?

Pierwszy raz po to, aby mogły zorientować się w jego treści i w pytaniu końcowym. Potem wyjaśnia: *Macie narysowane drzewo. Małe kartoniki mogą zastępować ptaszki. Powtórzę zadanie, a wy przedstawcie to zadanie na rysunku*. Następnie powtarza to zadanie w taki sposób: *Dwanaście ptaszków siedziało na drzewie* (zawiesza głos, aby dziecko miało czas na ułożenie kartoników na drzewie). *Cztery odleciały* (zawiesza głos, aby dziecko miało czas na zabranie kartoników). *Ile ptaszków nadal siedzi na drzewie?*

Rozwiązanie zadania jest łatwe, chociaż wymaga odejmowania z przekroczeniem progu dziesiątkowego. Dzieci układają 12 ciemnych kartoników (tyle ptaków jest na drzewie) i zabierają 4 (bo tyle odleciało), na koniec liczą pozostałe i odpowiadają na pytanie końcowe zadania.

Do rysunku drzewa można układać i rozwiązywać wiele innych zadań z treścią, na przykład zadania o owocach na dodawanie: *(Tyle jabłek jest na drzewie, tyle leży pod drzewem. Ile jest razem?)* lub na odejmowanie: *Tyle jabłek było na drzewie, ktoś zerwał tyle. Ile pozostało?*

Ptaki i owoce mogą zostać zastąpione kolorowymi kartonowymi kółkami, ziarnami fasoli itp. Na koniec trzeba zachęcić dzieci do przemiennego układania i rozwiązywania serii zadań z treścią do narysowanego drzewa. W edukacji przedszkolnej i szkolnej przebiega to tak:

- dzieci siedzą w parach naprzeciw siebie, pomiędzy nimi jest rysunek drzewa, w zasięgu ręki mają kolorowe kartoniki;
- jedno dziecko układa zadanie np. o ptakach, drugie je rozwiązuje, układając kolorowe kartoniki na rysunku i zgodnie z treścią historyjki zabiera lub dodaje kilka;
- na koniec dziecko rozwiązujące zadanie odpowiada na pytanie zawarte w zadaniu;
- zmiana ról: dziecko, które rozwiązywało zadanie – układa je, dziecko układające zadanie teraz je rozwiązuje.

W edukacji domowej dziecko układa zadanie dla dorosłego, który je rozwiązuje, stosując z całą powagą symulację i odpowiada na pytanie końcowe. Potem zmiana ról: dorosły układa zadanie, a dziecko je rozwiązuje.

10.2.2. Seria zadań o ciastkach na tacy lub dużym talerzu

Dzieci rysują na kartonie z bloku rysunkowego sporą tacę lub talerz. W zasięgu ręki mają kolorowe małe kartoniki – będą nimi zastępować ciastka. Nauczyciel przedstawia dzieciom każde zadanie dwukrotnie:

- pierwszy raz, aby mogły się zorientować w historyjce zadania i w pytaniu końcowym;
- drugi raz zawieszając głos, tak aby dzieci zauważyły wielkości i symulowały je, układając kartoniki zastępujące ciastka (elementy zbioru zastępczego) na talerzu (tacy);
- na koniec dzieci odpowiadają na pytanie końcowe.

Przykłady zadań o ciastkach na dodawanie²⁶ i odejmowanie²⁷

²⁶Zosia zadanie na dodawanie rozwiązała tak: ułożyła na narysowanej tacy kartoniki zastępujące ciasta w taki sposób: w jednym szeregu 5 brązowych kółeczek (pączki), w drugim szeregu 4 żółte trójkąty (słodkie rożki) oraz w trzecim szeregu 6 białych prostokątów (serniki). Potem policzyła ułożone kartoniki i stwierdziła: *Mama kupiła piętnaście ciastek.*

²⁷Jarek rozwiązał zadanie na odejmowanie tak: na tacy ułożył 13 kółeczek, śmiejąc się, zabrał 5 i stwierdził: *Te zjadł pies Burek. Zostało osiem pączków* i pokazał je.

Mam kupiła na przyjęcie 5 pączków, 4 słodkie rożki i 6 serników.

Ile ciastek kupiła mama?

Babcia ułożyła na tacy 13 pączków.

Zakradł się pies Burek i zjadł 5 pączków.

Ile pączków zostało na tacy?

Równie proste są zadania z treścią ilustrowane układaniem owoców na tacy. Kolorowe kartoniki zastępują owoce²⁸. Podobnie jak w serii zadań z narysowanym drzewem i w serii z rysunkiem tacy trzeba zachęcić dzieci do przemiennego układania i rozwiązywania serii zadań z treścią. Tak, jak to przedstawiłam wcześniej.

10.2.3. Serie zadań „Mikołajowe prezenty”

Na kartce dzieci rysują dwa spore worki. Do dyspozycji mają małe kartonowe kółka, trójkąty, kwadraty i prostokąty. Będą pełnić funkcję prezentów. Worki są dwa i można do nich wkładać (układać na nich) różną liczbę prezentów, dodawać następne prezenty, zabierać kilka. Stwarza to możliwość ułożenia bogatej serii zadań. Przykłady zadań:

Mikołaj włożył do każdego worka po 2 pomarańcze,

po 2 tabliczki czekolady i po 3 trójkątne batoniki.

Ile prezentów ma Mikołaj w workach?

Mikołaj włożył po 8 prezentów do każdego worka.

Wyjął z worków 14 prezentów i rozdził je dzieciom.

Ile prezentów zostało w workach?

Nauczyciel przedstawia zadanie – tak jak poprzednie – dwa razy. Pierwszy raz tak, aby dzieci zorientowały się w historyjce i w pytaniu końcowym. Przedstawiając zadania drugi raz, zawiesza głos po to, aby dostrzegły znaczące dla rozwiązania informacje:

- mają ułożyć na workach odpowiednią liczbę drobnych przedmiotów (zastępują prezenty);
- policzyć je razem i zabrać tyle, ile Mikołaj wyjął z worków;
- na koniec dzieci odpowiadają na pytanie końcowe²⁹.

²⁸Przykład zadania na dodawanie: *Dziadek ułożył na tacy: 8 jabłek, 7 gruszek i 4 brzoskwinie. Ile owoców dziadek ułożył na tacy?* Przykład zadania na odejmowanie: *Na tacy było 14 jabłek. Babcia zabrała 6 jabłek na kompot. Ile jabłek zostało na tacy?*

²⁹Marcin przejawiający zadatki uzdolnień matematycznych stwierdził: *To łatwe. W workach zostały tylko 2 prezenty.* Powiedziałam do Marcina: *Będzie trudniejsze,*

Podobnie jak w poprzednich seriach serii zadań i w tej trzeba zachęcić dzieci do przemiennego układania i rozwiązywania serii zadań z treścią.

10.3. Etap trzeci – wdrażanie dzieci do układania zadań i rozwiązywania zadań z treścią z zastosowaniem symulacji (manipulowanie zbiorami zastępczymi) i zapisywania formuły rozwiązania

To, co różni układanie i rozwiązywanie zadań z treścią przez dzieci przedszkolne i uczniów klasy I, dotyczy właśnie zapisywania formuły rozwiązania zadania z treścią. Dziecko przedszkolne ma umieć skupić się tak, aby zrozumieć sens historyjki i pytanie końcowe. Przy niewielkiej pomocy ze strony nauczyciela ma wyłuskać dane zawarte w zadaniu, przedstawić je na liczmanach (za pomocą zbioru zastępczego). Manipulując nimi, ma ustalić wynik rozwiązania, np. gdy zadanie jest na dodawanie – dołożyć kilka liczmanów, gdy zadanie jest na odejmowanie – zabrać kilka liczmanów. Odpowiedzieć na pytanie końcowe.

W klasie I dzieci mają dodatkowo zapisać formułę rozwiązania zadania za pomocą symboli cyfr, symboli liczb oraz znaków działań i relacji³⁰. Dlatego trzeba zadbać także o to, aby dzieci nabrały wprawy w stosowaniu symulacji w rozwiązywaniu zadań z treścią bez wspierania się rysunkiem. Jeżeli dzieci potrafią biegle zastępować obiekty swoimi palcami³¹ oraz elementami innych zbiorów zastępczych, łatwiej im przejść do liczenia w pamięci.

jeżeli ustalisz: ile prezentów zostało w jednym worku, a ile w drugim? Marcin spojrział na mnie i zaczął przekładać prezenty, a potem stwierdził: Mogło być tak, że po rozdaniu prezentów w jednym worku zostały dwa prezenty, a drugi był pusty. Mogło też być tak, że w każdym worku został jeden prezent. Razem zostały dwa prezenty.

³⁰Tym, co zapomnieli, przypominam, że znakami działań są: $-$, $+$, $:$, \cdot , a znakami relacji są $=$, $<$, $>$.

³¹Trzeba wyjaśnić, że palce i patyczki – tak wygodne w użyciu – mają pewne ograniczenia. Ułożone w szereg wymuszają liczenie po kolei, doliczanie i odliczanie. Natomiast kasztany, ziarna fasoli, kartonowe kóteczka guzików mogą być grupowane po kilka. Można więc objąć je wzrokiem i określić globalnie liczebność, bez przeliczania. Możliwość ujęcia liczebności bez konieczności przeliczania pomaga dzieciom przejść na poziom rachowania w pamięci, a także w lepszym zrozumieniu sensu dodawania, odejmowania, rozdzielania po jednym, po kilka itd. Choćby z tego powodu dzieci mają mieć do dyspozycji różne zbiory zastępcze przy rozwiązywaniu zadań z treścią z zastosowaniem symulacji.

Dlaczego rozwiązywanie zadań z treścią jest dla dzieci bardzo trudne...

Wróćmy do wdrażania dzieci do rozwiązywania zadań z treścią bez obrazków, z zastosowaniem symulacji i z wykorzystaniem regularności dziesiętkowego systemu liczenia³². Dobre efekty przynosi następujący sposób postępowania:

- dzieci mają w zasięgu rąk po kilkanaście drobnych przedmiotów pełniących rolę zbiorów zastępczych (np. patyczki, kasztany, małe kartoniki o różnych kształtach i kolorach) oraz liczydełka;
- nauczyciel przedstawia każde zadanie dwa razy:
 - a) pierwszy raz, aby dzieci mogły zorientować się w historyjce zadania i w pytaniu końcowym,
 - b) drugi raz zawieszając głos tak, aby zauważyły wielkości zawarte w zadaniu i przedstawiły je, posługując się zbiorami zastępczymi;
- dzieci liczą elementy zbiorów zastępczych, doliczają dołożone (w dodawaniu) lub zabierają kilka i liczą pozostałe (w odejmowaniu), grupują po kilka i liczą je (w mnożeniu), rozdzielają po kilka (w dzieleniu). Na koniec odpowiadają na pytanie końcowe.

Im więcej zadań z treścią dzieci rozwiążą w taki sposób, tym lepiej. Pierwsze zadanie może nawiązywać do serii zadań z ciastkami, ale dziecko będzie je rozwiązywać bez rysunku. Oto przykład zadania z treścią rozwiązywanego w taki sposób:

Na uroczysty podwieczorek dla dzieci kupiono:

6 ciastek z kremem, 8 serniczków i 4 pączki.

Ile kupiono ciastek?

Nauczyciel przedstawia treść zadania i zwraca się do dzieci: *Macie kolorowe kartoniki. Można nimi zastąpić ciastka. Powtarzam zadanie... Na uroczysty podwieczorek dla dzieci kupiono sześć ciastek z kremem (milknie na chwilę, aby dzieci mogły ułożyć 6 kartoników), osiem serniczków (milknie, a dzieci dokładają 8 innych kartoników) i cztery pączki (milknie, a dziecko dokłada 4 inne kartoniki). Ile kupiono ciastek?* Nie znam dziecka, które by nie wiedziało (widzi ułożone kartoniki i liczy je), jak ma na to pytanie odpowiedzieć. Jeżeli dzieci rozwiązują takie – lub

³²Dodam, że zajmujemy się tym w czasie, gdy dziecko dostrzega już regularności dziesiętkowego systemu liczenia i potrafi z niego korzystać, licząc w szerokim zakresie, a także w obliczaniu sum i różnic.

podobne zadanie – w klasie I, mają dodatkowo zapisać formułę rozwiązania w postaci działania

$$8 + 6 + 4 = 18$$

i odpowiedzieć na pytanie końcowe.

Na koniec jeszcze jedna uwaga. To, co przedstawiłam w artykule, jest wprowadzeniem w problemy edukacyjne wdrażania dzieci do układania i rozwiązywania zadań z treścią. Więcej informacji podaję w publikacji *Jak pomóc dziecku pokonać niepowodzenia w nauce matematyki. Rozpoznawanie przyczyn i działania naprawcze. Podręcznik z serii „Dziecięca matematyka” dla rodziców, terapeutów i nauczycieli*, Wydawnictwo CEBP, w druku – książka ukaże się na początku roku 2021.

Literatura

B u g a j s k a - J a s z c z o ł t B., C z a j k o w s k a M.: 2015, *Zadania niestandardowe w teorii i praktyce nauczania w klasach I–III*, w: Z. Semadeni, E. Gruszczyk-Kolczyńska, G. Trelński, B. Bugajska-Jaszczołt, M. Czajkowska, *Matematyczna edukacja wczesnoszkolna. Teoria i praktyka*, Wydawnictwo Pedagogiczne ZNP, Kielce.

G r u s z c z y k - K o l c z y ń s k a E.: 1992, *Dzieci ze specyficznymi trudnościami w uczeniu się matematyki. Przyczyny, diagnoza, zajęcia korekcyjno-wyrównawcze*, WSiP, Warszawa.

G r u s z c z y k - K o l c z y ń s k a E., *Jak pomóc dziecku pokonać niepowodzenia w nauce matematyki. Rozpoznawanie przyczyn i działania naprawcze. Podręcznik dla rodziców, terapeutów i nauczycieli z serii Dziecięca matematyka*, Wydawnictwo CEBP, w druku.

G r u s z c z y k - K o l c z y ń s k a E., Z i e l i ń s k a E.: 2005, *Wspomaganie dzieci w rozwoju do skupiania uwagi i zapamiętywania. Uwarunkowania psychologiczne i pedagogiczne, programy i metodyka*, WSiP, Warszawa.

J a g o d z i ń s k a M.: 2003, *Rozwój pamięci w dzieciństwie*, GWP, Gdańsk.

K a ł m y k o w a Z.I.: 1976, *Problemowo-syntetyczna metodyka diagnostyki nauczalności*, w: *Materiały do nauczania psychologii*, (red.) Wołoszynowa L., t. 2, seria 3, Warszawa.

Dlaczego rozwiązywanie zadań z treścią jest dla dzieci bardzo trudne...

- K a ł m y k o w a Z.I.: 1986, *Umstwiennoje razwitiie szkolnikow ostajuszczich w uczenii*, w: *Ostajuszczije w uczenii szkolniki. Problema psichicheskowo rozwitija*, (red.) Kałmykowa Z.I., Kułagin I.J., Moskwa.
- K i e l a r - T u r s k a M.: 2013, *Językowa wewnętrzna i zewnętrzna kontrola działania*, „Psychologia Rozwojowa” 2013, tom 18, nr 4.
- N o w i k J.: 2011, *Kształcenie matematyczne w edukacji wczesnoszkolnej*, Wydawnictwo Nowik, Opole.
- O b u c h o w s k i K.: 1982, *Kody orientacji emocjonalnej i struktura procesów emocjonalnych*, PWN, Warszawa.
- S c h a f f e r H.R.: 2012, *Psychologia dziecka*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa.
- T i c h o m i r o w O.K.: 1976, *Struktura czynności myślenia człowieka. Z badań teoretycznych i eksperymentalnych*, PWN, Warszawa.
- T y s z k o w a M.: 1972, *Zachowanie się dzieci szkolnych w sytuacjach trudnych*, WSiP, Warszawa.
- T y s z k o w a M.: 1972, *Problemy odporności emocjonalnej dzieci i młodzieży*, Wydawnictwo Nasza Księgarnia, Warszawa.
- W y g o t s k i L.S.: 1978, *Narzędzie i znak w rozwoju dziecka*, PWN, Warszawa.
- Z a j o n c R.B.: 185, *Uczucie i myślenie: nie trzeba się domyślać, aby wiedzieć, co się woli*, „Przegląd Psychologiczny” nr 1.
- Z a l e w s k a J.: 2012, *Strategie intelektualne stosowane przez uczniów klasy trzeciej w rozwiązywaniu zadań matematycznych*, niepublikowana rozprawa doktorska napisana po kierunkiem E. Gruszczyk-Kolczyńskiej, Akademia Pedagogiki Specjalnej, Warszawa.

**Why solving mathematical tasks with content
is very difficult for children
and how it can be effectively remedied**

Summary

Mathematical tasks with content are arranged and solved by children in kindergartens and subsequent years of school education. They cause them a lot of trouble, although they come from life situations and seem easy to teachers. This is a serious problem because – in composing and solving such problems – children accumulate experiences from which they create knowledge and math skills. They also learn to use what they know and can do in mathematics in life-like situations.

In the first part of the article, I discuss the causes of excessive difficulties in solving content problems, referring to the research results. In the second part of the article, I explain why excessive difficulties in solving content tasks are caused by a poor methodology for implementing children to solve content tasks. In the third part, I discuss the research that became the basis for the development of a method of effectively helping children to create and solve content tasks.

On the basis of these studies, I found that the main cause of excessive difficulties in arranging and solving content tasks is the discrepancy between children's strategies for cognition and solving content tasks and the ways in which teachers teach children to solve such tasks. After discussing these discrepancies, I explain how to effectively teach children to compose and solve content tasks in home, preschool and school education. I hope the findings in this article will help adults – teachers and parents – change for the better the ways in which children are introduced to arranging and solving content problems.